JOURNAL

DE

L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE,

PUBLIÉ

PAR LE CONSEIL D'INSTRUCTION

DE CET ÉTABLISSEMENT.

VINGT-SIXIÈME CAHIER.

TOME XVI.

Paris,

BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.

1838

JOURNAL

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

MÉMOIRE

Sur le mouvement des Projectiles dans l'air, en ayant égard à la rotation de la Terre;

Par M. POISSON.

Lu à l'Académie des Sciences, le 13 novembre 1837.

Dans ce Mémoire, le projectile sera considéré comme un point matériel et isolé, c'est-à-dire comme un corps dont la masse est réunie au centre de gravité; et il s'agira d'apprécier l'influence de la rotation de la Terre sur son mouvement. J'en présenterai incessamment un autre à l'Académie, où l'on aura égard à la forme et aux dimensions du mobile, et dont l'objet sera de déterminer, principalement en ce qui concerne les projectiles de l'artillerie, l'influence que leur propre rotation peut produire sur leur mouvement de translation.

La théorie de la résistance que les fluides en général, et l'air en particulier, opposent au mouvement des corps qui les traversent, n'est, jusqu'à présent, qu'une ébauche très imparfaite. On y assimile cette force à une suite continuelle de chocs du mobile contre les particules du fluide, qui disparaissent et s'anéantissent pour ainsi dire, à mesure qu'elles ont été atteintes par ce corps, et qu'elles lui ont enlevé de petites quantités de mouvement, proportionnelles à leurs masses et à sa vitesse. Newton, à qui l'on doit cet essai de théorie, en avait conclu qu'abstraction faite de la rotation du mobile, et pour une sphère, par exemple, la résistance de l'air est égale au poids d'un cylindre de ce fluide, ayant pour base et pour hauteur, le grand cercle de la sphère et la hauteur due à sa vitesse. Mais les expériences qu'il fit sur la chute des corps dans l'air, lui montrèrent bientôt l'inexactitude de ce résultat, et l'ont conduit à réduire de moitié, cette mesure de la résistance; on a jugé, depuis, cette réduction trop forte; et Borda a conclu de ses propres observations, que la mesure de la résistance devait être seulement abaissée aux trois cinquièmes de sa valeur théorique. D'après la théorie de Newton, modifiée par l'expérience, la force retardatrice, rapportée à l'unité de masse, d'une sphère qui se meut dans l'air, a pour expression le carré de la vitesse de ce corps, divisé par son diamètre et par le rapport de sa densité à celle du fluide, et multiplié par un coefficient numérique sur lequel tous les auteurs de Balistique ne sont pas d'accord. Suivant Lombard (*), et en s'appuyant sur les expériences de Borda, ce coefficient serait égal à environ neuf quarantièmes. Mais la loi véritable de la résistance en fonction de la vitesse, est beaucoup plus compliquée : dans les mouvements qui sont, ou très rapides, ou très lents, elle paraît s'écarter notablement de la proportionnalité au carré de la vitesse; elle croît suivant un plus grand rapport, dans le cas des très grandes vitesses; et au contraire, elle est sensiblement proportionnelle à la simple vitesse, quand il s'agit de petits mouvements, comme les très petites vibrations du pendule à secondes (**).

Pour déterminer directement et sans aucune hypothèse, la loi de la résistance qu'un corps éprouve en se mouvant dans un fluide, il

---

(*) *Traité du Mouvement des Projectiles*, page 99.

(**) *Additions à la Connaissance des Tems*, année 1834, page 18.

faudrait considérer à la fois ce mouvement et celui que le mobile communique au fluide : par l'effet de ce double mouvement, le fluide exerce à chaque instant une certaine pression, en chaque point du mobile et normale à sa surface; cette pression, différente de celle qui a lieu dans l'état de repos, produit la résistance proprement dite que le mobile éprouve, et à laquelle il faudrait encore joindre la force tangente à la surface, provenant du frottement de ce corps contre la couche fluide qui le touche. C'est ce que j'ai pu faire, en effet, dans mon Mémoire sur les *Mouvements simultanés du pendule et de l'air environnant* (*), et ce qui m'a conduit à déduire de la théorie, la correction nouvelle que M. Bessel a fait subir, d'après l'expérience, à la longueur du pendule à secondes. J'essaierai, par la suite, d'étendre mon analyse au cas du mouvement progressif des projectiles dans l'air, et de déterminer, s'il m'est possible, la pression que le fluide, qu'ils déplacent en le comprimant d'un côté et le dilatant de l'autre, exerce sur leur surface, ou la résistance qu'ils éprouvent, envisagée sous le point de vue que je viens d'indiquer. Je n'ai pas besoin de dire combien la connaissance de cette loi, exacte et générale, serait importante dans beaucoup de questions, et, par exemple, dans le problème de la Balistique. Mais pour l'objet que je me suis proposé dans ce Mémoire, j'ai pu admettre comme étant suffisamment approchée, la loi ordinaire de la résistance proportionnelle au carré de la vitesse.

C'est aussi Newton qui a donné le premier exemple de la détermination du mouvement d'un corps pesant dans un milieu résistant. Quand le mouvement est vertical, il a résolu le problème, en supposant la résistance proportionnelle, soit à la vitesse, soit à son carré; mais lorsque le projectile est lancé dans l'air suivant une direction quelconque, il s'est borné à considérer le cas de cette force proportionnelle à la simple vitesse, en observant toutefois que ce cas n'était pas celui de la nature. Les deux équations que Newton a dû intégrer

(*) Tome XI des *Mémoires de l'Académie des Sciences*.

pour déterminer les composantes horizontale et verticale de la vitesse à un instant quelconque, sont linéaires, du premier ordre et à coefficients constants; et les deux inconnues y sont séparées, de sorte que ces deux équations se résolvent indépendamment l'une de l'autre, et que leur solution ne suppose réellement qu'une simple intégration immédiate. Il n'en est plus de même dans le cas de la résistance proportionnelle au carré de la vitesse: les deux inconnues entrent à la fois dans chacune des équations du mouvement, qui ne sont plus linéaires; et ce n'est que par une combinaison particulière, que l'on parvient à y séparer les variables et à les ramener aux quadratures, ce que l'on regarde comme la solution complète du problème. Elle est due à Jean Bernouilli, qui l'a donnée dans les actes de Leipzig de 1719, plus de trente ans après la solution de Newton, et à une époque où le calcul intégral avait déjà fait de grands progrès. Cependant, Euler, au commencement de son mémoire sur cette matière (*), exprime sa surprise de voir que Newton se soit arrêté au cas de la résistance proportionnelle à la simple vitesse, et n'ait pas considéré le cas de la nature; lui, dit-il, qui a résolu bien d'autres problèmes plus difficiles. On sait d'ailleurs que la question de la trajectoire dans un milieu résistant en raison du carré de la vitesse, fut proposée comme un défi, aux géomètres du continent, par un Anglais nommé Keil, qui croyait le problème insoluble, parce que son illustre compatriote ne l'avait pas résolu. Maintenant le calcul numérique des intégrales qui expriment le temps et les deux coordonnées du mobile en fonctions d'une quatrième variable, s'effectue aussi simplement que la question le comporte, et en poussant les approximations aussi loin qu'on veut. On en peut voir un exemple dans les *Exercices de calcul intégral*, de Legendre (**), où ces coordonnées sont calculées à moins d'un cent-millième de leurs valeurs.

Indépendamment de la force centrifuge provenant de la rotation de

(*) *Mémoires de l'Académie de Berlin*, année 1753.
(**) Tome I^{er}, page 336.

la Terre, et qui influe sur le mouvement des corps pesants, en diminuant la gravité, d'une quantité variable avec la latitude; cette rotation produit encore, dans ces mouvements, certaines déviations qu'il est intéressant de connaître, soit en elles-mêmes, soit pour savoir jusqu'à quel point elles peuvent influer sur la trajectoire des projectiles, et s'il est nécessaire d'y avoir égard dans la pratique de l'artillerie. Plusieurs physiciens ont mesuré, avec autant de précision qu'il a été possible, les petites distances dont les corps qui tombent d'une hauteur considérable, s'écartent du pied de la verticale. Laplace et M. Gauss ont soumis cette question au calcul; mais en intégrant les équations de ce mouvement à très peu près vertical, ils ont fait abstraction de la résistance de l'air, qui peut cependant avoir quelquefois une influence extrêmement grande sur le résultat. J'ai donc pensé qu'il serait utile de reprendre ce problème en entier, et d'en étendre la solution au cas général où le projectile est lancé dans l'air, avec une vitesse et suivant une direction quelconques.

Pour cela, j'ai d'abord formé les équations différentielles du mouvement absolu dans l'espace, en rapportant à des axes fixes les coordonnées du mobile; puis j'en ai déduit les équations du mouvement apparent, tel que nous l'observons près de la surface du globe, ou rapporté à des axes fixes à cette surface, qui participent, ainsi que nous, à la rotation de la Terre. Ces équations différentielles sont très compliquées; mais, en prenant la seconde de temps pour unité, la vitesse angulaire du mouvement diurne est une très petite fraction; ce qui permet de les réduire à une forme plus simple. On en déduit alors quelques conséquences générales, dont voici les énoncés.

Le mouvement de la Terre empêche un liquide, contenu dans un vase et tournant avec une vitesse constante autour d'un axe vertical, de parvenir rigoureusement à une figure permanente, qui serait celle d'un paraboloïde de révolution, si la Terre était considérée comme immobile.

Si un corps se meut sur une courbe donnée et attachée fixement à la surface du globe, l'équation différentielle de son mouvement ne contient pas la vitesse de rotation de la Terre, et ce mouvement est le même, en conséquence, que si la Terre était en repos. Ainsi, pour une valeur donnée de la pesanteur, résultante de la figure et de la rotation du sphéroïde terrestre, les oscillations du pendule sont les mêmes dans tous les *azimuts* autour de la verticale; résultat qu'il était important de démontrer, vu le degré de précision que l'on apporte maintenant dans la détermination du pendule à secondes, en différents lieux de la Terre. Mais le mouvement diurne et la direction du plan des oscillations ont une petite influence sur la tension variable que le fil éprouve pendant qu'elles ont lieu, et qui n'est pas rigoureusement la même dans tous les azimuts.

Enfin, quand un projectile est lancé dans l'air suivant une direction quelconque, la rotation de la Terre n'augmente ni ne diminue la distance à laquelle il se trouve à chaque instant, du plan parallèle à l'équateur, mené par son point de départ.

Avant de chercher les intégrales des équations du mouvement apparent, dans le cas général, d'une grandeur et d'une direction quelconques de la vitesse initiale, j'ai considéré les cas particuliers les plus simples. Le premier est celui où le mobile part d'un point situé à une hauteur donnée au-dessus du sol, et est abandonné à l'action de la pesanteur, sans qu'on lui imprime aucune vitesse particulière, de sorte qu'il commence à tomber verticalement. La vitesse à son point de départ, provenant de la rotation de la Terre à laquelle il participe, étant plus grande que celle qui répond au pied de la verticale, on comprend que le mobile, quand il a atteint le sol, doit s'écarter du pied de cette ligne, à l'*est* ou dans le sens du mouvement vrai de la Terre. Mais le calcul peut seul donner la mesure de cet écart, surtout lorsqu'on a égard à la résistance de l'air: il fait voir, en effet, que la déviation a lieu vers l'*est*, et qu'elle est nulle dans le sens du méridien. Pour comparer à l'expérience, la formule qui en exprime la grandeur, j'ai choisi les observations de ce genre qui ont été faites en 1833 par M. le professeur Reich, dans les mines de la Saxe. La hauteur de la chute était de 158 mètres et demi; et M. Reich a condu de la moyenne de 106 expériences, une déviation à l'*est*, de 28 millimètres et un tiers. Il a aussi trouvé à très peu près six secondes pour le temps de la chute; au moyen de cette donnée, j'ai pu calculer, sans aucune hypothèse, le coefficient de la résistance de l'air que le mobile a dû éprouver; et ensuite, la formule a donné 27 millimètres et demi pour la déviation; ce qui diffère de l'expérience, de moins d'un millimètre. Dans le vide, cette déviation ne surpasserait pas d'un dixième de millimètre, celle qui a lieu dans l'air; en sorte que dans cet exemple, la résistance de l'air n'a eu qu'une influence insensible.

Quand le projectile part de la surface de la Terre, et qu'il est lancé verticalement de bas en haut avec une vitesse donnée, on conçoit que, pendant la durée de son élévation, il doit s'écarter de la verticale, vers l'*ouest*, ou en sens contraire de la rotation de la Terre. Il semble qu'ensuite, durant sa chute, il devrait se rapprocher de cette ligne, et retomber à peu près à son point de départ; mais il n'en est point ainsi. Parvenu au point le plus haut de sa trajectoire, et lorsqu'il a perdu toute sa vitesse verticale, le projectile, en déviant vers l'*ouest*, a aussi acquis une vitesse horizontale dans le même sens, en vertu de laquelle il continue à dévier dans ce sens, du moins pendant une partie de sa chute. La difficulté analytique que ce second cas présente, est de raccorder, pour ainsi dire, les deux mouvements successifs, ascendant et descendant, du projectile, qui sont exprimés par des formules très différentes, lorsque l'on tient compte de la résistance de l'air. Pour appliquer à un exemple la formule relative à la déviation totale du mobile, quand il est retombé sur le sol, j'ai supposé que ce corps fût une balle, tirée verticalement par un fusil d'infanterie, avec une vitesse d'environ 400 mètres par secondes. La grandeur de cette déviation varie beaucoup avec celle de la résistance de l'air; en donnant successivement au coefficient de cette résistance des valeurs qui soient entre elles comme quatre et trois, on trouve des déviations vers l'*ouest* dans les deux cas, mais d'environ un et trois décimètres : dans le vide, cette déviation s'élèverait à une cinquantaine de mètres; en sorte qu'elle est réduite à un cinq-centième de sa valeur, par la plus grande des deux résistances.

J'ai encore examiné en particulier, le cas où la vitesse initiale du projectile est presque horizontale, ce qui comprend, pour fixer les idées, le tir à la *cible*. On trouvera dans mon Mémoire les formules qui s'y rapportent et qui en expriment toutes les circonstances, selon que le tir a lieu vers tel ou tel point de l'horizon. Ici, je me bornerai à dire que la vitesse initiale étant toujours d'environ 400 mètres, et la distance de la cible, placée au *but en blanc*, égale à 200 mètres, les déviations horizontale et verticale de la balle, dues au mouvement de la Terre, s'élèveraient à peine à un demi-centimètre, c'est-à-dire qu'elles n'influent pas sensiblement sur la justesse du tir et sont inutiles à considérer dans la pratique. Ces déviations sont également négligeables dans le tir du canon, et dans tous les mouvements qui ont lieu suivant une direction à peu près horizontale.

Dans le cas général, les effets que produit le mouvement de la Terre dans le mouvement d'un projectile, sont d'abord des accroissements positifs ou négatifs, soit de l'intervalle de temps que le mobile emploie à aller de son point de départ au point où il retombe sur le terrain, soit de la distance du second point au premier, que l'on appelle la *portée horizontale*. Les signes de ces accroissements dépendent de la direction du plan vertical dans lequel le projectile est lancé: il y a augmentation dans une direction et diminution dans une autre; leurs valeurs sont exprimées par des intégrales doubles, dont le calcul numérique serait très pénible. Le mouvement diurne fait, en outre, sortir le mobile du plan vertical où il a été projeté; ce qui donne lieu à une déviation horizontale, dont la valeur se compose de deux parties distinctes, exprimées aussi par des intégrales doubles. L'une de ces déviations partielles est indépendante de la direction du plan vertical; elle a toujours lieu à droite de l'observateur placé au point de départ et tourné vers la trajectoire; à notre latitude, on peut la considérer comme étant l'effet principal de la rotation du globe; et, heureusement, on en obtient des limites plus faciles à calculer que sa valeur même, qui se réduiront en nombres, si l'on veut, au moyen de la longueur de la portée et de la durée du trajet, données par l'observation, et suffiront pour apprécier la grandeur de la déviation. En appliquant, par exemple, ces limites au tir de la bombe, tel qu'il a lieu dans les exercices des *polygones*, c'est-à-dire sous l'angle de 45°, avec une vitesse initiale de 120 mètres par seconde, qui donne une portée d'environ 1200 mètres, pour un projectile de 27 centimètres de diamètre et du poids de 51 kilogrammes (*); on trouve que la déviattion du point de chute sera comprise entre 90 et 120 centimètres, lorsqu'on tirera dans un plan vertical, tangent au *parallèle* du point de départ. Elle aura lieu vers le *midi*, quand on tirera vers l'*est*, et vers le *nord*, si l'on tire vers l'*ouest*. En l'évaluant à un mètre, et observant qu'un tel écart à la distance de 1200 mètres, répond à un angle d'à peu près trois minutes, il s'ensuit que, pour atteindre plus sûrement le but, il faudrait tirer à gauche du plan donné, dans un autre plan qui ferait avec celui-là un angle de trois minutes, dont la considération peut influer sur la justesse du tir et sur la chance d'atteindre le *tonneau*, dans les exercices où le canonnier doit apporter beaucoup de précision. La déviation horizontale sera un peu moindre et s'observera vers l'*est*, quand on tirera vers le *nord*; elle sera un peu plus grande et aura lieu vers l'*ouest*, quand on tirera vers le *midi*. Ajoutons encore, que dans le tir de la bombe à grande portée, par exemple à une distance du but, d'environ 4000 mètres, ce qui suppose une vitesse initiale d'à peu près le tiers de 800 mètres, sous l'angle de 45°, et pour un projectile de 90 kilogrammes et d'un tiers de mètre de diamètre, les limites de la déviation, en tirant à l'*est* ou à l'*ouest*, seront à peu près 5 mètres et 10 mètres; en évaluant donc sa grandeur à 7 ou 8 mètres, on voit que dans les siéges, des édifices et des personnes ont pu être atteints par la chute d'une bombe, à cause du mouvement de la Terre, et d'autres ne pas l'être, pour la même cause.

Ces nombres, et ceux qu'on a cités plus haut, se rapportent à une latitude moyenne; ils varieront avec celle du lieu de l'expérience : à

(*) La bombe de 10 pouces et de 104 livres.

l'équateur, et lorsque le tir a lieu dans son plan, la déviation horizontale s'évanouit, tandis que les accroissements de la durée du trajet et de la longueur de la portée y atteignent leur *maximum;* dans les hautes latitudes, ce sont, au contraire, la déviation qui approche de son *maximum*, et ces accroissements qui diminuent: au pôle, la déviation horizontale, la même en ce point pour le tir dans tous les plans verticaux, surpasserait d'à peu près moitié celle qui a lieu dans notre région. Partout, les accroissements de la portée et du temps sont nuls, quand la vitesse initiale est dirigée dans le plan du méridien.

---

(1). Le projectile est une sphère homogène; c'est le mouvement de son centre de gravité ou de figure que l'on considère; on y suppose sa masse entière réunie, et la résistance de l'air directement appliquée.

La rotation de la Terre a une petite influence sur le mouvement des corps près de sa surface; son mouvement de translation n'en a aucune; c'est pourquoi j'en ferai abstraction, et je regarderai le centre du globe comme un point fixe.

Soit C ce point. Au bout du temps quelconque t, écoulé depuis l'origine du mouvement, soit aussi M le point de sa *trajectoire* où se trouve le mobile. Par le point C, menons trois axes fixes et rectangulaires $Cx_{,}$, $Cy_{,}$, $Cz_{,}$, et désignons par $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, les coordonnées de M rapportées à ces axes. En appelant V la somme des molécules du sphéroïde terrestre, divisées par leurs distances respectives au point M, les composantes parallèles à ces mêmes axes, de l'attraction de la Terre sur le point matériel situé en M, seront exprimées, comme on sait, par les différences partielles $\frac{dV}{dx_{,}}$, $\frac{dV}{dy_{,}}$, $\frac{dV}{dz_{,}}$; et selon qu'elles auront des valeurs positives ou négatives, elles agiront dans le sens des demi-axes $Cx_{,}$, $Cy_{,}$, $Cz_{,}$, des coordonnées positives, ou dans le sens contraire. Représentons aussi par φ la force accélératrice provenant de la résistance de l'air, et par λ, μ, ν, les angles que fait sa direction avec des parallèles à ces trois droites, menées par le point M, de sorte que $\varphi\cos\lambda$, $\varphi\cos\mu$, $\varphi\cos\nu$, soient les composantes de φ, suivant les mêmes directions que celles de l'attraction. En prenant le temps t pour la variable indépendante, dont la différentielle est constante, nous aurons

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x_{,}}{dt^2} &= \frac{dV}{dx_{,}} + \varphi\cos\lambda, \\ \frac{d^2y_{,}}{dt^2} &= \frac{dV}{dy_{,}} + \varphi\cos\mu, \\ \frac{d^2z_{,}}{dt^2} &= \frac{dV}{dz_{,}} + \varphi\cos\nu, \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

pour les trois équations différentielles secondes du mouvement absolu du projectile dans l'espace.

On prendra le plan du *méridien* passant par le point de départ du mobile, c'est-à-dire, le plan de ce point et de l'axe de rotation de la Terre, pour celui des $y_{,}$ et $z_{,}$; les demi-axes $Cy_{,}$ et $Cz_{,}$ seront compris dans notre hémisphère, le second sera dirigé vers le pôle, et le premier sera compris dans le plan de l'équateur, ainsi que l'axe des $x_{,}$. On représentera par r le rayon vecteur CM, par θ l'angle compris entre CM et le demi-axe $Cz_{,}$, et par ψ l'angle que fait le plan de ces deux droites avec celui des $y_{,}$ et $z_{,}$; en sorte qu'au bout du temps t, les coordonnées polaires du mobile soient r, θ, ψ, et qu'on ait en conséquence

$$z_{,} = r\cos\theta, \quad y_{,} = r\sin\theta\cos\psi, \quad x_{,} = r\sin\theta\sin\psi.$$

Soit aussi n la vitesse angulaire du mouvement diurne de la Terre; $nr\sin\theta$ sera la vitesse absolue de l'air au point M, et cette dernière vitesse étant tangente au *parallèle* passant par ce point, ses composantes par rapport aux directions des coordonnées $z_{,}$, $y_{,}$, $x_{,}$, seront zéro, $-nr\sin\theta\,.\sin\psi$, $nr\sin\theta.\cos\psi$, en supposant le demi-axe $Cx_{,}$ dirigé vers l'*orient*. Les deux dernières composantes pourront être remplacées par $-nx_{,}$ et $ny_{,}$; au point M, les trois composantes de la vitesse relative du mobile et de l'air, auront donc pour valeurs, abstraction faite du signe,

$$\frac{dz_{,}}{dt},\quad \frac{dy_{,}}{dt} + nx_{,},\quad \frac{dx_{,}}{dt} - ny_{,};$$

et en désignant par v, cette vitesse, on aura

$$v^2 = \frac{dz_{,}^2}{dt^2} + \left(\frac{dy_{,}}{dt} + \;\; n_{,}\right)^2 + \left(\frac{dx_{,}}{dt} - ny_{,}\right)^2.$$

On considérera la résistance de l'air comme une fonction donnée de cette vitesse relative; et de plus, on supposera cette force directement opposée à cette vitesse: on aura par conséquent

$$\frac{dz_{,}}{dt} = - v\cos\lambda,\quad \frac{dy_{,}}{dt} + nx_{,} = - v\cos\mu,\quad \frac{dx_{,}}{dt} - ny_{,} = - v\cos v,$$

pour déterminer les angles λ, μ, v, qui répondent à la direction de φ au point M.

Après qu'on aura fait une hypothèse sur la forme de la fonction φ, les équations (a) ne contiendront plus que les inconnues $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, et leurs différentielles, ou, si l'on veut, les inconnues r, θ, ψ; en les intégrant, du moins par approximation, elles feront donc connaître, à un instant quelconque, la position du mobile dans l'espace; mais dans la question qui nous occupe, c'est à des axes fixes à la surface de la Terre, et participant à son mouvement de rotation, qu'il faut rapporter la position du projectile, c'est-à-dire qu'il s'agit de déterminer son mouvement apparent, tel qu'on l'observe à cette surface, ce qui exige que l'on change les inconnues $x_{,}$, $y_{,}^{\prime}$, $z_{,}$, en d'autres coordonnées.

(2). Soit donc O, un point déterminé de la surface du globe. Par ce point, menons trois axes rectangulaires Oz', Oy', Ox'; le premier dirigé suivant le prolongement du rayon CO, le second compris dans le plan du méridien et dirigé vers le *nord*, et le troisième dans le plan du parallèle, et dirigé vers l'*est*, ou dans le sens du mouvement diurne. Au bout du temps t, soient z', y', x', les coordonnées du lieu M du mobile, rapportées à ces nouveaux axes. Si l'on suppose qu'à l'origine du mouvement, le méridien du point O coïncidait avec le plan des $y_\prime$ et $z_\prime$, l'angle compris entre ces deux plans au bout du temps t, sera égal à nt. Je désignerai par γ la latitude du point O, ou plus exactement, l'angle compris entre le rayon CO et sa projection sur l'équateur; et je représenterai par l la longueur de ce rayon. Les coordonnées du point O, rapportées aux axes $Cx_\prime$, $Cy_\prime$, $Cz_\prime$, se déduiront de $x_\prime$, $y_\prime$, $z_\prime$, en y faisant $r = l$, $\theta = 90^\circ - \gamma$, $\psi = nt$; en sorte qu'elles auront pour valeurs $l\cos\gamma\sin nt$, $l\cos\gamma\cos nt$, $l\sin\gamma$. D'après les formules connues de la transformation des coordonnées, dont on change à la fois, l'origine et les directions, on aura alors

$$\begin{aligned}
x' &= (x_\prime - l\cos\gamma\sin nt)\cos nt - (y_\prime - l\cos\gamma\cos nt)\sin nt,\\
y' &= (z_\prime - l\sin\gamma)\cos\gamma - (y_\prime - l\cos\gamma\cos nt)\sin\gamma\cos nt\\
&\qquad - (x_\prime - l\cos\gamma\sin nt)\sin\gamma\sin nt,\\
z' &= (z_\prime - l\sin\gamma)\sin\gamma + (y_\prime - l\cos\gamma\cos nt)\cos\gamma\cos nt\\
&\qquad + (x_\prime - l\cos\gamma\sin nt)\cos\gamma\sin nt,
\end{aligned}$$

ou bien, en réduisant,

$$\begin{aligned}
x' &= x_\prime\cos nt - y_\prime\sin nt,\\
y' &= z_\prime\cos\gamma - y_\prime\sin\gamma\cos nt - x_\prime\sin\gamma\sin nt,\\
z' &= z_\prime\sin\gamma + y_\prime\cos\gamma\cos nt + x_\prime\cos\gamma\sin nt - l\,;
\end{aligned}$$

d'où l'on tire réciproquement

$$\begin{aligned}
x_\prime &= x'\cos nt - y'\sin\gamma\sin nt + (z' + l)\cos\gamma\sin nt,\\
y_\prime &= -x'\sin nt - y'\sin\gamma\cos nt + (z' + l)\cos\gamma\cos nt,\\
z_\prime &= y'\cos\gamma + (z' + l)\sin\gamma,
\end{aligned}$$

pour les valeurs de $x_\prime$, $y_\prime$, $z_\prime$, qu'il faudra substituer dans les équations (a), et dans celles qui déterminent la vitesse v et sa direction.

Les coefficients de $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, dans les valeurs de x', y', z', doivent être les cosinus des angles que des parallèles aux axes des $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, menées par le point M, font avec ceux des x', y', z'; et c'est, en effet, ce qu'il est aisé de vérifier. Il s'ensuit donc que si l'on appelle λ', μ', ν', les angles que fait la direction de la vitesse v, contraire à celle de la force φ, avec ces nouveaux axes, on aura

$$\begin{aligned}
v\cos\lambda' &= -v\cos\lambda.\cos nt + v\cos\mu.\sin nt,\\
v\cos\mu' &= -v\cos\nu.\cos\gamma + v\cos\mu.\sin\gamma\cos nt + v\cos\lambda.\sin\gamma\sin nt,\\
v\cos\nu' &= -v\cos\nu.\sin\gamma - v\cos\mu.\cos\gamma\cos nt - v\cos\lambda.\cos\gamma\sin nt.
\end{aligned}$$

En vertu des valeurs de $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, on aura aussi

$$\begin{aligned}
\frac{dx_{,}}{dt} - ny_{,} &= \frac{dx'}{dt}\cos nt - \frac{dy'}{dt}\sin\gamma\sin nt + \frac{dz'}{dt}\cos\gamma\sin nt,\\
\frac{dy_{,}}{dt} + nx_{,} &= -\frac{dx'}{dt}\sin nt - \frac{dy'}{dt}\sin\gamma\cos nt + \frac{dz'}{dt}\cos\gamma\cos nt,\\
\frac{dz_{,}}{dt} &= \frac{dy'}{dt}\cos\gamma + \frac{dz'}{dt}\sin\gamma,
\end{aligned}$$

pour les valeurs précédentes de $-v\cos\lambda$, $-v\cos\mu$, $-v\cos\nu$; et toutes réductions faites, il en résultera simplement

$$v\cos\lambda' = \frac{dx'}{dt},\quad v\cos\mu' = \frac{dy'}{dt},\quad v\cos\nu' = \frac{dz'}{dt}.$$

La vitesse relative v du mobile et de l'air, est donc en grandeur et en direction, la vitesse même du projectile dans son mouvement apparent; ce qui tient à la nature du mouvement de rotation du fluide, et n'aurait plus lieu, en général, si l'air avait un autre mouvement, comme dans le phénomène des *vents alisés*, par exemple. Si l'on appelle s l'arc de la trajectoire apparente, compté à partir d'un point fixe sur cette courbe et dans le sens du mouvement du projectile, on aura

$$ds^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2;$$

la différentielle ds sera positive ainsi que dt, et les équations précédentes donneront alors

$$\nu = \frac{ds}{dt},\ \cos\lambda' = \frac{dx'}{ds},\ \cos\mu' = \frac{dy'}{ds},\ \cos\nu' = \frac{dz'}{ds}.$$

Cela posé, les équations (a) deviendront d'abord

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2x'}{dt^2}\cos nt - \frac{d^2y'}{dt^2}\sin\gamma\sin nt + \frac{d^2z'}{dt^2}\cos\gamma\sin nt \\
&- 2n\left(\frac{dx'}{dt}\sin nt + \frac{dy'}{dt}\sin\gamma\cos nt - \frac{dz'}{dt}\cos\gamma\cos nt\right) - n^2x_, \\
&= \frac{dV}{dx_,} + \varphi\cos\lambda, \\
&-\frac{d^2x'}{dt^2}\sin nt - \frac{d^2y'}{dt^2}\sin\gamma\cos nt + \frac{d^2z'}{dt^2}\cos\gamma\cos nt \\
&- 2n\left(\frac{dx'}{dt}\cos nt - \frac{dy'}{dt}\sin\gamma\sin nt + \frac{dz'}{dt}\cos\gamma\sin nt\right) - n^2y_, \\
&= \frac{dV}{dy_,} + \varphi\cos\mu, \\
&\quad \frac{d^2y'}{dt^2}\cos\gamma + \frac{d^2z'}{dt^2}\sin\gamma = \frac{dV}{dz_,} + \varphi\cos\nu;
\end{aligned}$$

en considérant successivement V comme une fonction de $x_,$, $y_,$, $z_,$, et comme une fonction de x', y', z', on aura

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dx'} &= \frac{dV}{dx_,}\cos nt - \frac{dV}{dy_,}\sin nt, \\
\frac{dV}{dy'} &= -\frac{dV}{dx_,}\sin\gamma\sin nt - \frac{dV}{dy_,}\sin\gamma\cos nt + \frac{dV}{dz_,}\cos\gamma, \\
\frac{dV}{dz'} &= \frac{dV}{dx_,}\cos\gamma\sin nt + \frac{dV}{dy_,}\cos\gamma\cos nt + \frac{dV}{dz_,}\sin\gamma;
\end{aligned}$$

et il sera facile de changer les équations précédentes en celles-ci :

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2x'}{dt^2} &= 2n\left(\frac{dy'}{dt}\sin\gamma - \frac{dz'}{dt}\cos\gamma\right) + n^2x' + \frac{dV}{dx'} - \varphi\frac{dx'}{ds}, \\
\frac{d^2y'}{dt^2} &= -2n\frac{dx'}{dt}\sin\gamma + n^2[y'\sin\gamma - (z'+l)\cos\gamma]\sin\gamma + \frac{dV}{dy'} - \varphi\frac{dy'}{ds}, \\
\frac{d^2z'}{dt^2} &= 2n\frac{dx'}{dt}\cos\gamma - n^2[y'\sin\gamma - (z'+l)\cos\gamma]\cos\gamma + \frac{dV}{dz'} - \varphi\frac{dz'}{ds},
\end{aligned}\right\}\ (b)$$

qui seront les équations du mouvement apparent, qu'on se proposait de trouver, et que l'on réduira à une forme plus simple par les considérations suivantes.

(3). La Terre étant composée de couches à très peu près sphériques, concentriques, et dont chacune a partout une même densité, la valeur de V est de la forme

$$V = \frac{lf}{r} + \varepsilon f U,$$

où l'on désigne par f, une force très peu différente de l'attraction au point O, dont la distance au centre C est l; par ε, une petite fraction qui a pour valeur, environ un 300^e; et par U, une fonction donnée de x', y', z'. La valeur du rayon vecteur r du point M sera donnée par l'équation

$$r^2 = x'^2 + y'^2 + (z' + l)^2.$$

Si O est voisin du point de départ du projectile, les coordonnées x', y', z', seront très petites par rapport à l, dans toute l'étendue de la trajectoire; on pourra alors développer les différences partielles $\frac{dU}{dx'}$, $\frac{dU}{dy'}$, $\frac{dU}{dz'}$, en séries très convergentes, ordonnées suivant les puissances et les produits de $\frac{x'}{l}$, $\frac{y'}{l}$, $\frac{z'}{l}$; et le développement correspondant de U sera

$$U = F + x'G + y'H + z'K + \frac{x'^2}{l} G' + \frac{x'y'}{l} H' + \text{etc.};$$

F étant une constante arbitraire, et G, H, etc., des constantes données.

Au point O, les composantes de l'attraction, suivant les axes des x', y', z', ou les valeurs de $\frac{dV}{dx'}$, $\frac{dV}{dy'}$, $\frac{dV}{dz'}$, qui répondent à $x' = 0$, $y' = 0$, z' 0, seront $\varepsilon f G$, $\varepsilon f H$, $-f + \varepsilon f K$. Pour en déduire celles de la pesanteur, il y faudra ajouter les composantes de la force centrifuge due à la rotation de la Terre; or, ses trois composantes sont zéro, $-n^2 l \sin\gamma\cos\gamma$, $n^2 l\cos^2\gamma$, en observant qu'au point O la force centrifuge est égale à $n^2 l\cos\gamma$, et dirigée suivant le prolongement de la perpendiculaire à l'axe de rotation, de sorte que sa direction fait avec les axes des x', y', z', des angles égaux à $90°$, $90°+\gamma$, γ. Par conséquent, si l'on appelle g la pesanteur en ce point, et g', h', k', les angles compris entre sa direction et les axes des x', y', z', on aura

$$\left.\begin{aligned} g\cos g' &= \varepsilon f\mathrm{G}, \\ g\cos h' &= \varepsilon f\mathrm{H} - n^2 l\sin\gamma\cos\gamma, \\ g\cos k' &= -f + \varepsilon f\mathrm{K} + n^2 l\cos^2\gamma, \end{aligned}\right\} \qquad (c)$$

pour les valeurs complètes de ses trois composantes. Ces formules doivent coïncider avec les seconds membres des équations (b), en y supprimant les termes dépendants de la vitesse du mobile, et y faisant $x'=0$, $y'=0$, $z'=0$; ce qui a lieu effectivement. On vérifiera de même que les composantes de l'attraction jointe à la force centrifuge, qui répondent au point M, coïncident aussi avec ces seconds membres, en y supprimant seulement les termes relatifs à la vitesse du projectile, et quelles que soient les coordonnées x', y', z'.

Le rapport de $n^2 l$ à g est une fraction très peu différente de ε; si donc on néglige les carrés et le produit de ces deux fractions, et si l'on observe que la force g est une quantité positive, on déduira des équations précédentes

$$g = f - \varepsilon f\mathrm{K} - n^2 l\cos^2\gamma, \quad \cos k' = -1;$$

ce qui fait connaître l'intensité de la pesanteur au point O, et montre que cette force fait avec l'axe Oz', un angle dont le supplément est de l'ordre de petitesse de ε.

Dans le développement de V, je négligerai les termes qui ont l^2 pour diviseur, et ceux qui ont l pour diviseur et ε pour coefficient.

De cette manière, on aura

$$V = lf - \varepsilon' f + \frac{\varepsilon'^2 f}{l} + \varepsilon f k + \varepsilon f G x' + \varepsilon f H y' + \varepsilon f K z'.$$

A ce degré d'approximation, il faudra aussi négliger les termes des équations (b) qui dépendent de n^2 et de l'une des variables x', y', z'; car, si l'on fait $\frac{n^2 l}{g} = \delta$, le terme $n^2 x'$, par exemple, deviendra $\frac{g x' \delta}{l}$, et sera par conséquent du même ordre de petitesse que ceux qui se trouvent négligés dans les différences partielles de V.

Cela posé, et en ayant égard aux formules (c), les équations (b) se réduiront à

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2x'}{dt^2} &= 2n\left(\frac{dy'}{dt}\sin\gamma - \frac{dz'}{dt}\cos\gamma\right) + g\cos g' - \varphi\frac{dx'}{ds},\\
\frac{d^2y'}{dt^2} &= -2n\frac{dx'}{dt}\sin\gamma + g\cos h' - \varphi\frac{dy'}{ds},\\
\frac{d^2z'}{dt^2} &= 2n\frac{dx'}{dt}\cos\gamma + g\cos k' + \frac{2z'f}{l} - \varphi\frac{dz'}{ds};
\end{aligned}\right\} \quad (d)$$

mais afin de les rendre plus immédiatement applicables, nous y changerons x', y', z', en d'autres coordonnées peu différentes de celles-là.

(4). Pour cela, élevons par le point O, une verticale Oz dirigée vers le *zénith*, ou en sens contraire de la pesanteur, et dans le plan horizontal, perpendiculaire à Oz, tirons arbitrairement deux axes Ox et Oy, perpendiculaires entre eux. Soient x, y, z, les coordonnées de M, rapportées à ces axes Ox, Oy, Oz. On aura

$$z = -x'\cos g' - y'\cos h' - z'\cos k',$$

en observant que Oz fait avec les axes des x', y', z', des angles égaux aux suppléments de g', h', k'. On aura, en même temps,

$$\begin{aligned}
y &= x'\cos x'Oy + y'\cos y'Oy + z'\cos z'Oy,\\
x &= x'\cos x'Ox + y'\cos y'Ox + z'\cos z'Ox.
\end{aligned}$$

On pourra supposer que Ox et Oy s'écartent très peu de Ox' et Oy', de sorte que les angles $x'Ox$ et $y'Oy$ soient de l'ordre de petitesse de la fraction ε. En négligeant leurs carrés, on aura alors

$$\cos x'Ox = 1, \quad \cos y'Oy = 1.$$

Je supposerai de plus, que l'axe Oy soit compris dans le plan du méridien; l'axe Ox' étant perpendiculaire à ce plan, nous aurons

$$\cos x'Oy = 0;$$

et comme on doit avoir

$$\cos x'Ox \,.\, \cos y'Ox + \cos x'Oy \,.\, \cos y'Oy + \cos g' \cos h' = 0,$$

il en résultera aussi

$$\cos y'Ox = 0,$$

en observant que le produit $\cos g' \cos h'$ est de l'ordre de petitesse des quantités que nous négligeons. Enfin, à cause des équations

$$\cos x'Ox \,.\, \cos z'Ox + \cos x'Oy \,.\, \cos z'Oy + \cos g' \cos k' = 0,$$
$$\cos y'Ox \,.\, \cos z'Ox + \cos y'Oy \,.\, \cos z'Oy + \cos h' \cos k' = 0,$$

et de $\cos k' = -1$, nous aurons

$$\cos z'Ox = \cos g', \quad \cos z'Oy = \cos h',$$

et par conséquent

$$x = x' + z' \cos g', \quad y = y' + z' \cos h'.$$

De ces valeurs de x, y, z, on déduit réciproquement

$$\begin{aligned} x' &= x - z\cos g', \\ y' &= y - z\cos h', \\ z' &= z + x\cos g' + y\cos h', \end{aligned}$$

en négligeant toujours les carrés et le produit de $\cos g'$ et $\cos h'$.

Maintenant, après avoir éliminé x', y', z', des équations (d), on les changera facilement en celles-ci :

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= 2n\left(\frac{dy}{dt}\sin\gamma - \frac{dz}{dt}\cos\gamma\right) - 2n\left(\frac{dz}{dt}\cos h'\sin\gamma + \frac{dy}{dt}\cos h'\cos\gamma\right) - \varphi\frac{dx}{ds}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -2n\frac{dx}{dt}\sin\gamma + 2n\left(\frac{dz}{dt}\cos g'\sin\gamma + \frac{dx}{dt}\cos h'\cos\gamma\right) - \varphi\frac{dy}{ds}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= 2n\frac{dx}{dt}\cos\gamma - 2n\left(\frac{dy}{dt}\cos g'\sin\gamma - \frac{dx}{dt}\cos h'\sin\gamma\right) - g + \frac{2gz}{l} - \varphi\frac{dz}{ds}. \end{aligned}$$

On pourra, pour plus de simplicité, négliger les termes de ces formules qui ont $n\cos g'$ ou $n\cos h'$ pour facteur, et dont l'influence sur les valeurs de x, y, z, serait à peu près insensible. On négligera par la même raison, le terme $\frac{2gz}{l}$, provenant de la variation de la pesanteur dans le sens de la hauteur, et l'on considérera l'angle γ, comme exprimant la latitude du point O.

J'admettrai l'hypothèse ordinaire de la résistance de l'air, proportionnelle au carré de la vitesse; et je ferai, en conséquence,

$$\varphi = c\frac{ds^2}{dt^2};$$

c étant un coefficient proportionnel à la densité de l'air au point M, que l'on pourra, en général, considérer comme une quantité constante dans toute l'étendue de la trajectoire : si l'on appelle ξ la hauteur due à la vitesse $\frac{ds}{dt}$ de sorte qu'on ait $\frac{ds^2}{dt^2} = 2g\xi$ et $\varphi = 2cg\xi$, il faudra pour l'homogénéité des quantités φ et g, que $2c\xi$ soit un nombre abstrait, on que $\frac{1}{c}$ soit une ligne. L'air étant un fluide pesant, exercera en outre, sur le projectile, une pression hydrostatique; ce qui exigera que l'on fasse subir une diminution à la pesanteur g qui aurait lieu dans le vide; de plus cette réduction sera elle-même susceptible dans le mouvement progressif que nous considérons, d'une modification semblable à celle qui répond, d'après la remarque de M. Bessel, au mouvement oscillatoire du pendule; mais nous ne nous occuperons point ici de cette question; et nous regarderons la valeur de g comme une donnée de l'expérience.

Les équations différentielles du mouvement apparent du projectile, se réduiront donc finalement à

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= 2n\left(\frac{dy}{dt}\sin\gamma - \frac{dz}{dt}\cos\gamma\right) - c\frac{ds}{dt}\frac{dx}{dt},\\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -2n\frac{dx}{dt}\sin\gamma - c\frac{ds}{dt}\frac{dy}{dt},\\ \frac{d^2z}{dt^2} &= 2n\frac{dx}{dt}\cos\gamma - g - c\frac{ds}{dt}\frac{dz}{dt}.\end{aligned}\right\}\quad (e)$$

Elles suffiront pour déterminer au degré d'approximation que l'on peut désirer, l'influence de la rotation du globe sur ce mouvement; on n'oubliera pas que les axes des x et des y sont les intersections du plan horizontal, avec les plans du parallèle et du méridien, et qu'à partir du point O, les x positives sont portées du côté de l'*est*, les x négatives du côté de l'*ouest*, les y positives vers le *nord*, les y négatives vers le *midi*. L'axe des z positives est vertical et dirigé de bas en haut.

On appliquera tout-à-l'heure ces équations à divers exemples; auparavant il y a quelques remarques qu'il ne sera pas inutile de faire.

(5). Les équations (e) s'étendront facilement au cas d'un point matériel, assujetti à se mouvoir sur une courbe donnée et attachée à la surface de la Terre.

Pour cela, représentons par

$$L = 0, \quad L' = 0,$$

les deux équations de cette courbe; L et L′ étant des fonctions données de x, y, z. Il suffira, comme on sait, d'ajouter aux seconds membres des trois équations (e), les quantités correspondantes

$$\omega\frac{dL}{dx}+\omega'\frac{dL'}{dx},\ \omega\frac{dL}{dy}+\omega'\frac{dL'}{dy},\ \omega\frac{dL}{dz}+\omega'\frac{dL'}{dz},$$

dans lesquelles ω et ω' sont des coefficients inconnus. On éliminera ensuite ces deux nouvelles inconnues, en ajoutant les trois équations après les avoir multipliés respectivement par dx, dy, dz; les termes dépendants de n disparaissent en même temps, et il vient

$$\frac{dsd^2s}{dt^2} = -gdz - c\frac{ds^3}{dt^2}, \qquad (f)$$

en observant qu'on a

$$dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z = \tfrac{1}{2}d.ds^2 = dsd^2s,$$
$$\frac{dL}{dx}dx + \frac{dL}{dy}dy + \frac{dL}{dz}dz = dL = 0,$$
$$\frac{dL'}{dx}dx + \frac{dL'}{dy}dy + \frac{dL'}{dz}dz = dL' = 0.$$

On pourra tirer des équations de la courbe donnée, des valeurs de x, y, z, en fonctions de s; en les substituant dans l'équation (f), on aura donc, entre les variables s et t, l'équation différentielle du mouvement sur cette courbe. Il en résulte qu'abstraction faite de la partie de g qui dépend de la rotation de la Terre, cette rotation n'a aucune autre influence sur le mouvement dont il s'agit. Ainsi, par exemple, en chaque point de la surface du globe, et pour une valeur donnée de g, les oscillations du pendule sont indépendantes du mouvement diurne, et les mêmes dans tous les *azimuts* autour de la verticale; ce qu'il était bon de faire voir, vu le degré de précision que l'on apporte maintenant dans les mesures du pendule à secondes, en différens lieux de la Terre.

La pression exercée par un point matériel sur la courbe qu'il est forcé de décrire, n'est pas, comme sa vitesse, indépendante de la rotation du globe; c'est ce que l'on verra en effet, en la déterminant de la manière suivante.

Je représente par X, Y, Z, les seconds membres des équations (e), abstraction faite des termes provenant de la résistance de l'air; on aura

$$X = 2n\left(\frac{dy}{dt}\sin\gamma - \frac{dz}{dt}\cos\gamma\right),$$

$$Y = -2n\frac{dx}{dt}\sin\gamma,$$

$$Z = 2n\frac{dx}{dt}\cos\gamma - g;$$

et ces quantités exprimeront les composantes horizontale et verticale de la force qui agit sur un point matériel pesant, en mouvement dans le vide, près de la surface du globe. Par le point quelconque M de sa trajectoire, je mène trois axes rectangulaires, savoir, le rayon de courbure, la tangente dans le sens du mouvement, une des deux parties de la perpendiculaire au plan osculateur. Soient P, Q, R, les composantes de la même force, suivant ces trois demi-axes; la force Q diminuée de la résistance de l'air, fera varier la vitesse du mobile sur la courbe donnée; la force R multipliée par la masse de ce corps, sera une composante de la pression exercée sur la courbe; l'autre composante aura pour valeur le produit de cette masse et de l'excès de la force centrifuge sur la force P; excès qui sera égal à $\frac{1}{\rho}\frac{ds^2}{dt^2} - P$, en désignant par ρ le rayon de courbure au point M. Or, on voit que la résultante de ces deux dernières forces, ou la pression totale que la trajectoire éprouvera en chacun de ses points, dépendra, à raison des forces P et R, du mouvement diurne du globe, de sa direction par rapport à celle de la vitesse du mobile, et de la latitude du point O.

Supposons, par exemple, qu'on n'ait point égard à la résistance de l'air, et que le mobile décrive uniformément, dans un plan horizontal, un cercle du rayon λ, avec une vitesse angulaire m. En plaçant l'origine O des coordonnées au centre de ce cercle, et comptant le temps t à partir d'un passage du mobile dans l'axe des x, on aura

$$x = \lambda \cos mt, \quad y = \lambda \sin mt, \quad z = 0;$$

d'où il résultera, pour ce cas particulier,

$$\begin{aligned} X &= 2mn\lambda \sin \gamma \cos mt, \\ Y &= 2mn\lambda \sin \gamma \sin mt, \\ Z &= -\ 2mn\lambda \cos \gamma \sin mt - g. \end{aligned}$$

Cette dernière force, prise avec un signe contraire et multipliée par la masse du mobile, exprimera la pression variable que la trajectoire éprouvera dans le sens de la pesanteur. La résultante des forces X et Y sera égale à $2mn\lambda \sin \gamma$, et dirigée suivant le prolongement de λ; elle s'ajoutera à la force centrifuge $m^2\lambda$, et il en résultera pour la pression horizontale, une valeur constante, égale au produit de $2mn\lambda \sin \gamma + m^2\lambda$, et de la masse du mobile.

Si l'on considère, de même, le mouvement du pendule simple dans un plan vertical, que ϵ soit l'angle compris entre ce plan et celui des x et z, que l'on désigne par λ la longueur constante de ce pendule, et, à un instant quelconque, par θ l'angle qu'il fait avec la verticale dirigée dans le sens de la pesanteur, on aura

$$x = \lambda \cos \epsilon \sin \theta, \quad y = \lambda \sin \epsilon \sin \theta, \quad z = -\ \lambda \cos \theta, \quad ds = \lambda d\theta.$$

Sans qu'on soit obligé de négliger la résistance de l'air, l'équation (f) fera connaître sous forme finie, la valeur de $\frac{d\theta}{dt}$ en fonction de θ, et l'on en conclura sans difficulté la tension variable du fil, ainsi que la force Q perpendiculaire au plan des oscillations. En calculant cette dernière force, on trouve qu'elle est trop petite pour écarter sensiblement le pendule de son plan, et avoir aucune influence appréciable sur son mouvement.

Quoique d'après les valeurs générales des forces X, Y, Z, la formule $Xdx + Ydy + Zdz$ se réduise à $-\ gdz$, on n'en doit pas conclure qu'un liquide homogène, soumis à ces forces, contenu dans un vase, et tournant uniformément autour de l'axe Oz, parviendrait à une figure permanente, ainsi que cela a lieu, lorsqu'on a seulement égard à la pesanteur et aux forces centrifuges des points du fluide, résultantes de sa rotation. En effet, pour cet équilibre des forces centrifuges et des forces X, Y, Z, il faudrait que celles-ci, étant réduites à des fonctions de x, y, z, satisfissent identiquement aux conditions d'intégrabilité de la formule $\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz$, savoir :

$$\frac{d\mathrm{X}}{dy} = \frac{d\mathrm{Y}}{dx}, \quad \frac{d\mathrm{Z}}{dx} = \frac{d\mathrm{X}}{dz}, \quad \frac{d\mathrm{Y}}{dz} = \frac{d\mathrm{Z}}{dy}.$$

Or, en désignant par m la vitesse angulaire et constante du fluide, on aurait, dans le mouvement dont il s'agit,

$$\frac{dx}{dt} = \mp my, \quad \frac{dy}{dt} = \pm mx, \quad \frac{dz}{dt} = 0,$$

et par conséquent

$$\mathrm{X} = \pm 2nmx \sin\gamma, \quad \mathrm{Y} = \pm 2nmy \sin\gamma, \quad \mathrm{Z} = \mp 2nmy \cos\gamma - g;$$

ce qui ne satisfait pas aux équations précédentes, excepté au pôle, où l'on a $\gamma = 90°$. En tout autre point de la Terre, la figure permanente d'un liquide tournant dans un vase, autour d'un axe vertical, est donc rigoureusement impossible, à raison du mouvement diurne de la Terre; mais la vitesse angulaire n de ce mouvement étant une très petite fraction, moindre qu'un millième, quand on prend la seconde pour unité, il s'ensuit que cette impossibilité ne saurait être reconnue par l'expérience.

(6). Reprenons actuellement les équations (e) du mouvement apparant d'un point matériel entièrement libre; et supposons d'abord que la direction de la trajectoire s'écarte très peu de la verticale; en sorte que les cosinus $\frac{dx}{ds}$ et $\frac{dy}{ds}$, des angles que fait la tangente au point quelconque M, avec les axes horizontaux des x et des y, soient de très petites fractions, dont on négligera les carrés et le produit. Les expressions de x, y, z, en fonctions de t, seront différentes, selon que le mouvement aura lieu dans le sens de la pesanteur ou en sens contraire; nous considérerons ces deux cas successivement en commençant par le premier.

Soit donc D un point de la verticale Oz, où le mobile était situé à l'origine du mouvement et d'où il a été abandonné, sans vitesse initiale, à l'action de la pesanteur. J'appelle h la hauteur DO de ce point de départ au-dessus du sol; puis, sans changer les directions des x et des y, je mets $h-z$ à la place de z dans les équations (e) et (f); de manière que la nouvelle ordonnée z soit comptée à partir du point D et dans le sens de la pesanteur. Si l'on compte aussi l'arc s à partir de ce point et dans le même sens que z, on aura

$$ds = dz, \quad s = z, \quad v = \frac{dz}{dt},$$

en négligeant $\frac{dx^2}{dt^2}$ et $\frac{dy^2}{dt^2}$. L'équation (f) deviendra

$$\frac{d^2z}{dt^2} = g - c\,\frac{dz^2}{dt^2}; \qquad (f')$$

on pourra l'employer au lieu de l'une des trois équations (e), dont elle est une conséquence; en conservant les deux premières, on aura, en même temps,

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= 2n\left(\frac{dy}{dt}\sin\gamma + \frac{dz}{dt}\cos\gamma\right) - c\,\frac{dz}{dt}\,\frac{dx}{dt}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -2n\,\frac{dx}{dt}\sin\gamma - c\,\frac{dz}{dt}\,\frac{dy}{dt}. \end{aligned}\right\} \qquad (e')$$

Je multiplie l'équation (f') par $2dz$, j'intègre ses deux membres et je fais

$$\int c\,\frac{dz^2}{dt^2}\,dz = u, \quad \frac{dz^2}{dt^2} = \frac{1}{c}\,\frac{du}{dz};$$

il en résulte

$$\frac{1}{c}\,\frac{du}{dz} = 2\int g dz - 2u;$$

équation linéaire et du premier ordre, dont l'intégrale complète est

$$u = 2e^{-2\int c dz} \int e^{2\int c dz} \left(\int g dz\right) c dz,$$

et où l'on pourrait supposer que g et c fussent des fonctions quelconques de z : on désigne ici, et l'on continuera de représenter dans tout ce Mémoire, par e la base des logarithmes népériens.

En remettant pour u l'intégrale que cette lettre représente, et différentiant ensuite par rapport à z, il vient

$$c\,\frac{dz^2}{dt^2} = 2c\int g dz - 4ce^{-2\int c dz} \int e^{2\int c dz} \left(\int g dz\right) dz;$$

d'où l'on tirera une fonction de z multipliée par dz, pour la valeur de dt, puis une expression de t en fonction de z. Ainsi l'équation (f'), du second ordre, à coefficients variables et non linéaire, est néanmoins intégrable sous forme finie, quels que soient les coefficients g et c. Comme ils sont dans la question présente, des quantités constantes, on aura simplement, par les règles ordinaires,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\left(e^{t\sqrt{gc}} - e^{-t\sqrt{gc}}\right)\sqrt{g}}{\left(e^{t\sqrt{gc}} + e^{-t\sqrt{gc}}\right)\sqrt{c}},$$

$$z = \frac{1}{c}\log\frac{1}{2}\left(e^{t\sqrt{gc}} + e^{-t\sqrt{gc}}\right),$$

en observant qu'on doit avoir $\frac{dz}{dt} = 0$ et $z = 0$, quand $t = 0$.

Je substitue cette expression de $\frac{dz}{dt}$ dans les équations (e'), et j'y fais, en outre,

$$\frac{dx}{dt} = p,\ \frac{dy}{dt} = q.$$

Elles deviennent

$$\frac{dp}{dt}-2nq\sin\gamma+\frac{(e^{t\sqrt{gc}}-e^{-t\sqrt{gc}})\sqrt{gc}}{e^{t\sqrt{gc}}+e^{-t\sqrt{gc}}}p=\frac{2(e^{t\sqrt{gc}}-e^{-t\sqrt{gc}})n\sqrt{g}\cos\gamma}{(e^{t\sqrt{gc}}+e^{-t\sqrt{gc}})\sqrt{c}},$$

$$\frac{dq}{dt}+2np\sin\gamma+\frac{(e^{t\sqrt{gc}}-e^{-t\sqrt{gc}})\sqrt{gc}}{e^{t\sqrt{gc}}+e^{-t\sqrt{gc}}}q=0.$$

D'après la théorie des équations différentielles linéaires, pour intégrer celles-ci, je fais d'abord abstraction du second membre de la première. J'en déduis alors ces deux autres équations :

$$\frac{pdp+qdq}{dt}+\frac{(e^{t\sqrt{gc}}-e^{-t\sqrt{gc}})\sqrt{gc}}{e^{t\sqrt{gc}}+e^{-t\sqrt{gc}}}(p^2+q^2)=0,$$

$$\frac{qdp-pdq}{dt}-2n\,(p^2+q^2)\sin\gamma=0,$$

dont les intégrales sont

$$(p^2+q^2)(e^{t\sqrt{gc}}+e^{-t\sqrt{gc}})^2=\mathrm{A},$$

$$\mathrm{arc}\left(\mathrm{tang}=\frac{p}{q}\right)=\mathrm{B}+2nt\sin\gamma,$$

en désignant par A et B les deux constantes arbitraires. On en conclut

$$p=\frac{a\sin(2nt\sin\gamma)+b\cos(2nt\sin\gamma)}{e^{t\sqrt{gc}}+e^{-t\sqrt{gc}}},$$

$$q=\frac{a\cos(2nt\sin\gamma)-b\sin(2nt\sin\gamma)}{e^{t\sqrt{gc}}+e^{-t\sqrt{gc}}};$$

a et b étant deux autres constantes arbitraires qu'il faudra changer conformément à la théorie citée, en des variables inconnues, pour avoir égard au second membre de la première des équations données, et déterminer les valeurs complètes de p et q.

De cette manière, on aura

$$\sin(2nt\sin\gamma)\frac{da}{dt}+\cos(2nt\sin\gamma)\frac{db}{dt}=2(e^{t\sqrt{gc}}-e^{-t\sqrt{gc}})\,n\sqrt{\frac{g}{c}}\cos\gamma,$$

$$\cos(2nt\sin\gamma)\frac{da}{dt}-\sin(2nt\sin\gamma)\frac{db}{dt}=0;$$

d'où l'on tire

$$da = 2n\sqrt{\frac{g}{c}}\cos\gamma\,(e^{t\sqrt{gc}} - e^{-t\sqrt{gc}})\sin(2nt\sin\gamma)\,dt\,,$$
$$db = 2n\sqrt{\frac{g}{c}}\cos\gamma\,(e^{t\sqrt{gc}} - e^{-t\sqrt{gc}})\cos(2nt\sin\gamma)\,dt.$$

J'intègre ces différentielles, puis je substitue leurs intégrales à la place de a et b, dans les valeurs de p et q, ou des vitesses $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$. En déterminant les constantes arbitraires par la condition que ces vitesses soient nulles quand $t = 0$, il vient

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2ng\cos\gamma}{gc + 4n^2\sin\gamma}\left[1 - \frac{2\cos(2nt\sin\gamma)}{e^{t\sqrt{gc}} + e^{-t\sqrt{gc}}}\right],$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{4ng\cos\gamma}{gc + 4n^2\sin\gamma}\left[\frac{\sin(2nt\sin\gamma)}{e^{t\sqrt{gc}} + e^{-t\sqrt{gc}}} - \frac{(e^{t\sqrt{gc}} - e^{-t\sqrt{gc}})\,n\sin\gamma}{(e^{t\sqrt{gc}} + e^{-t\sqrt{gc}})\sqrt{gc}}\right];$$

d'où il résulte finalement

$$x = \frac{2ng\cos\gamma}{gc + 4n^2\sin^2\gamma}\left[t - 2\int\frac{\cos(2nt\sin\gamma)\,dt}{e^{t\sqrt{gc}} + e^{-t\sqrt{gc}}}\right],$$
$$y = \frac{4ng\cos\gamma}{gc + 4n^2\sin^2\gamma}\left[\int\frac{\sin(2nt\sin\gamma)\,dt}{e^{t\sqrt{gc}} + e^{-t\sqrt{gc}}} - \frac{n\sin\gamma}{gc}\log\tfrac{1}{2}\left(e^{t\sqrt{gc}} + e^{-t\sqrt{gc}}\right)\right];$$

les intégrales étant prises de manière qu'elles s'évanouissent avec t, afin qu'on ait aussi $x = 0$ et $y = 0$ pour $t = 0$.

Lorsqu'à son départ du point D, le projectile aura reçu une très petite vitesse horizontale dont les composantes parallèles aux axes des x et y seront désignés par a' et b', il est aisé de voir que les quantités qu'il faudra ajouter aux valeurs de $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$ seront respectivement

$$\frac{2a'\cos(2nt\sin\gamma) + 2b'\sin(2nt\sin\gamma)}{e^{t\sqrt{gc}} + e^{-t\sqrt{gc}}}\,,\quad \frac{2b'\cos(2nt\sin\gamma) - 2a'\sin(2nt\sin\gamma)}{e^{t\sqrt{gc}} + e^{-t\sqrt{gc}}};$$

et, en même temps, il faudra augmenter x et y, des intégrales prises depuis $t=0$, de ces mêmes quantités multipliées par dt. On suppose, dans la question présente, que a' et b' sont zéro.

(7). Si l'on fait abstraction de la résistance de l'air, il faudra faire $c=0$, et l'on aura

$$x = \frac{g\cos\gamma}{4n^2\sin^3\gamma}\left[2nt\sin\gamma - \sin(2nt\sin\gamma)\right],$$
$$y = \frac{g\cos\gamma}{4n^2\sin^3\gamma}\left[1 - \cos(2nt\sin\gamma) - 2n^2t^2\sin^2\gamma\right],$$
$$z = \tfrac{1}{2}gt^2,$$

pour les formules relatives au mouvement dans le vide.

Quelle que soit cette résistance, ou la valeur de c, il est facile de voir que le coefficient de dt sous le signe $\int$ dans l'expression de x, est toujours au-dessous de $\frac{1}{2}$; l'intégrale est donc moindre que $\frac{1}{2}t$, et, conséquemment, la valeur de x est positive; ce qui montre que la déviation du projectile dans le sens du parallèle, se fera toujours vers l'*est* ou dans le sens du mouvement vrai de la Terre. En observant que la vitesse n de ce mouvement est une fraction moindre qu'un millième, quand on prend la seconde pour unité, de sorte que le produit nt ne peut être aussi qu'une petite fraction, dans toutes les expériences qu'il est possible de faire sur les déviations horizontales des corps qui tombent d'une hauteur considérable, on conclura, sans difficulté, de la comparaison des valeurs générales de x et y, que la deuxième doit être regardée comme insensible par rapport à la première. C'est donc aux erreurs inévitables de ce genre d'observations qu'il faut attribuer les déviations dans le sens du méridien, que quelques physiciens ont observées. Il suffira par conséquent de considérer la déviation dans le sens du parallèle, ou la valeur de x.

En négligeant le carré de nt dans l'intégrale qu'elle renferme, on aura

$$\int\frac{dt}{e^{t\sqrt{gc}}+e^{-t\sqrt{gc}}} = \frac{1}{\sqrt{gc}}\,\text{arc}\left(\text{tang} = e^{t\sqrt{gc}}\right) - \frac{\pi}{4\sqrt{gc}};$$

π désignant, à l'ordinaire, le rapport de la circonférence au diamètre. Si l'on appelle θ le temps total de la chute employé par le mobile pour atteindre le sol, ou tomber de toute la hauteur DO, et que l'on désigne par δ la valeur correspondante de x, on aura donc à très peu près

$$\delta = \frac{2n\cos\gamma}{c}\left[\theta - \frac{2}{\sqrt{gc}}\,\text{arc}\left(\text{tang} = e^{\theta\sqrt{gc}}\right) + \frac{\pi}{2\sqrt{gc}}\right];$$

cette hauteur DO ayant été désignée par h, on aura, en même temps,

$$h = \frac{1}{c}\log\frac{1}{2}\left(e^{\theta\sqrt{gc}} + e^{-\theta\sqrt{gc}}\right);$$

et dans ces équations il faudra faire

$$n = \frac{2\pi}{86164},\quad g = (9{,}80557)(1 - 0{,}002588\,.\cos 2\gamma),$$

en prenant la seconde et le mètre pour unités de temps et de longueur. Quand les valeurs de h et de θ seront données par l'observation, la seconde de ces équations fera connaître la valeur de c relative au projectile dont on aura fait usage, et la première déterminera ensuite la déviation horizontale, que l'on pourra comparer à celle qui aura été observée.

Pour donner un exemple de cette comparaison, je choisis les expériences faites en 1833, dans les mines de Freyberg, par M. le professeur Reich. Les valeurs de h et de θ étaient

$$h = 158{,}54,\quad \theta = 6{,}06;$$

dans le lieu de l'observation, on avait

$$\gamma = 50^\circ\,53',\quad g = 9{,}81075;$$

au moyen de ces valeurs, on trouve après quelques essais,

$$\theta\sqrt{gc} = 0{,}95,\quad \frac{1}{c} = 400{,}01,$$

de sorte que la ligne représentée par $\frac{1}{c}$ était sensiblement égale à 400 mètres; et l'on trouve ensuite

$$\delta = 0{,}027494,$$

ou à peu près vingt-sept millimètres et demi. M. Reich a conclu, de la moyenne de 106 observations,

$$\delta = 0{,}028396;$$

ce qui diffère du résultat du calcul, de moins d'un millimètre. Dans le vide, pour la valeur donnée de la hauteur h, on aurait

$$\theta = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 5{,}685;$$

et en négligeant le cube de nt dans l'expression de x qui répond à $c = 0$, et y faisant $t = \theta$, on aurait aussi

$$\delta = \tfrac{1}{3} gn\theta^3 \cos\gamma = 0{,}027644;$$

en sorte que la résistance a augmenté le temps θ de la chute du mobile, de 0,375, ou d'un peu plus d'un tiers de seconde, et diminué la déviation δ, de 0,00015, ou de moins d'un sixième de millimètre.

(8). Je suppose maintenant que le projectile soit lancé verticalement et de bas en haut, avec une vitesse donnée que je représenterai par a.

En comptant z dans le sens de ce mouvement et à partir du point de départ O, cette ordonnée sera positive dans toute l'étendue de la trajectoire; mais la différentielle dz sera positive dans la partie ascendante de cette courbe, et négative dans sa partie descendante. Or, si l'on néglige comme plus haut les carrés $\frac{dx^2}{ds^2}$ et $\frac{dy^2}{ds^2}$, on aura $ds = \pm dz$; et la différentielle ds devant être constamment posi-

positive (n° 2), il faudra prendre $ds = dz$ dans la première partie, et $ds = -dz$ dans la seconde; au moyen de quoi, l'équation (f) aura ces deux formes différentes, savoir :

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g - c\frac{dz^2}{dt^2},$$

pendant que le mobile s'élèvera, et

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g + c\frac{dz^2}{dt^2},$$

pendant qu'il descendra.

L'intégration de la première de ces deux équations donne

$$\frac{dz}{dt} = \frac{(a\sqrt{c}\cos t\sqrt{gc} - \sqrt{g}\sin t\sqrt{gc})\sqrt{g}}{(a\sqrt{c}\sin t\sqrt{gc} + \sqrt{g}\cos t\sqrt{gc})\sqrt{c}},$$

$$z = \frac{1}{c}\log\left(a\sqrt{\frac{c}{g}}\sin t\sqrt{gc} + \cos t\sqrt{gc}\right),$$

où l'on a déterminé les deux constantes arbitraires, par les conditions $\frac{dz}{dt} = a$ et $z = 0$ quand $t = 0$. Ces expressions de $\frac{dz}{dt}$ et z en fonctions de t, auront lieu jusqu'à l'époque où l'on aura $\frac{dz}{dt} = 0$ et où le mobile cessera de s'élever; en appelant θ' le temps de son élévation, on aura donc

$$a\sqrt{c}\cos\theta'\sqrt{gc} - \sqrt{g}\sin\theta'\sqrt{gc} = 0;$$

d'où l'on tire

$$\sin\theta'\sqrt{gc} = \frac{a\sqrt{c}}{\sqrt{a^2c+g}}, \quad \cos\theta'\sqrt{gc} = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{a^2c+g}},$$

et par suite

$$\theta' = \frac{1}{\sqrt{gc}}\,\text{arc}\left(\text{tang} = a\sqrt{\frac{c}{g}}\right), \quad h' = \frac{1}{c}\log\sqrt{\frac{a^2c+g}{g}},$$

en désignant par h' la plus grande hauteur à laquelle le mobile parviendra.

Après le temps θ', le corps commencera à descendre, et les valeurs de $\frac{dz}{dt}$ et de z relatives à la seconde partie de son mouvement, s'obtiendront en intégrant la seconde équation différentielle du second ordre et déterminant les constantes arbitraires, par les conditions $\frac{dz}{dt} = 0$ et $z = h'$ quand $t = \theta'$; ou bien, si l'on transporte l'origine des coordonnées au point le plus haut de la trajectoire, que l'on compte les z dans le sens de la pesanteur, et le temps t à partir de l'époque où le mobile commence à descendre, les expressions de $\frac{dz}{dt}$ et de z en fonctions de t, seront celles du n° 6. Elles subsisteront jusqu'à ce que le mobile soit retombé sur le sol, ou que l'ordonnée z, ainsi comptée, soit devenue égale à h'; en appelant donc $\theta_{\prime}$ le temps de la chute, et $a_{\prime}$ la vitesse au point le plus bas, on aura

$$h' = \frac{1}{c}\log\frac{1}{2}\left(e^{\theta_{\prime}\sqrt{gc}} + e^{-\theta_{\prime}\sqrt{gc}}\right),$$

$$a_{\prime} = \frac{\left(e^{\theta_{\prime}\sqrt{gc}} - e^{-\theta_{\prime}\sqrt{gc}}\right)\sqrt{g}}{\left(e^{\theta_{\prime}\sqrt{gc}} + e^{-\theta_{\prime}\sqrt{gc}}\right)\sqrt{c}};$$

à cause de la valeur précédente de h', on en conclura

$$\frac{1}{2}\left(e^{\theta_{\prime}\sqrt{gc}} + e^{-\theta_{\prime}\sqrt{gc}}\right) = \sqrt{\frac{a^2c+g}{g}};$$

et de là on déduit

$$\theta_{\prime} = \frac{1}{\sqrt{gc}}\log\left(\frac{\sqrt{a^2c+g}+a\sqrt{c}}{\sqrt{g}}\right),$$

$$a_{\prime} = \frac{a\sqrt{g}}{\sqrt{a^2c+g}}.$$

Le temps total de l'élévation et de la chute successives du projectile peut être déterminé par l'observation; en le désignant par θ, son expression sera la somme de θ' et $\theta_{\prime}$, en sorte que l'on aura

$$\theta\sqrt{gc} = \text{arc}\left(\text{tang} = a\sqrt{\frac{c}{g}}\right) + \log\left(\frac{\sqrt{a^2c+g}+a\sqrt{c}}{\sqrt{g}}\right); \qquad (g)$$

équation que l'on pourra faire servir à la détermination de la constante c, relative au mobile dont on aura fait usage, lorsque la vitesse de projection a sera connue.

Pour donner un exemple numérique de l'application de ces diverses formules, je suppose que cette constante c et la gravité g soient les mêmes que dans le cas du numéro précédent, et que la vitesse a soit aussi celle qui élèverait le mobile à une hauteur h' égale à la hauteur h qui avait lieu dans ce même cas, de sorte qu'on ait

$$c = 0{,}0025, \quad g = 9{,}81075; \quad h' = 158{,}54,$$

en prenant toujours le mètre et la seconde sexagésimale pour unités de longueur et de temps. L'expression de h' en fonction de a, donnera réciproquement

$$a = \sqrt{\frac{g}{c}\left(e^{2ch'} - 1\right)} = 68{,}89;$$

on aura aussi

$$a_{,} = \sqrt{\frac{g}{c}\left(1 - e^{-2ch'}\right)} = 46{,}35;$$

le temps $\theta_{,}$ de la chute sera 6,06, comme dans le cas du numéro précédent; et quant au temps de l'élévation, on aura

$$\theta' = 5{,}318,$$

d'après son expression précédente en fonction de a. Dans le vide, on aurait, par les formules ordinaires,

$$a_{,} = a = 55{,}77, \quad \theta_{,} = \theta' = 5{,}685.$$

Pour une élevation à la même hauteur h', la vitesse de projection a est donc moindre dans le vide que dans l'air, ce qui devait être évidemment; mais, à raison de cette différence des vitesses, le calcul montre que c'est le temps θ' de l'ascension dans le vide qui est le plus grand.

(9). Pendant toute la durée de l'ascension du projectile, son mouvement horizontal sera déterminé par les deux premières équations (e), dans lesquelles on fera $ds = dz$, et où l'on substituera pour $\frac{dz}{dt}$, son expression en fonction de t et de a du numéro précédent. En y faisant, en outre

$$\frac{dx}{dt} = p', \quad \frac{dy}{dt} = q',$$

elles deviendront

$$\frac{dp'}{dt} - 2nq'\sin\gamma + \frac{(a\sqrt{c}\cos t\sqrt{gc} - \sqrt{g}\sin t\sqrt{gc})\sqrt{gc}}{a\sqrt{c}\sin t\sqrt{gc} + \sqrt{g}\cos t\sqrt{gc}}\,p'$$
$$= \frac{2n\sqrt{gc}\cos\gamma(\sqrt{g}\sin t\sqrt{gc} - a\sqrt{c}\cos t\sqrt{gc})}{a\sqrt{c}\sin t\sqrt{gc} + \sqrt{g}\cos t\sqrt{gc}},$$
$$\frac{dq'}{dt} + 2np'\sin\gamma + \frac{(a\sqrt{c}\cos t\sqrt{gc} - \sqrt{g}\sin t\sqrt{gc})\sqrt{gc}}{a\sqrt{c}\sin t\sqrt{gc} + \sqrt{g}\cos t\sqrt{gc}}\,q' = 0.$$

En intégrant ces deux équations simultanées de la même manière que celles du n° 6, et en remettant ensuite pour p' et q' les vitesses $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$ qui doivent être nulles quand $t = 0$, on trouve

$$\frac{dx}{dt} = \frac{4n^2a\sqrt{g}\sin\gamma\cos\gamma\sin(2nt\sin\gamma) + 2ng\sqrt{g}\cos\gamma\cos(2nt\sin\gamma)}{(gc - 4n^2\sin^2\gamma)(a\sqrt{c}\sin t\sqrt{gc} + \sqrt{g}\cos t\sqrt{gc})}$$
$$- \frac{2ng\cos\gamma}{gc - 4n^2\sin^2\gamma},$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{4n^2a\sqrt{g}\sin\gamma\cos\gamma\cos(2nt\sin\gamma) - 2ng\sqrt{g}\cos\gamma\sin(2nt\sin\gamma)}{(gc - 4n^2\sin^2\gamma)(a\sqrt{c}\sin t\sqrt{gc} + \sqrt{g}\cos t\sqrt{gc})}$$
$$- \frac{4n^2\sqrt{g}\sin\gamma\cos\gamma(a\sqrt{c}\cos t\sqrt{gc} - \sqrt{g}\sin t\sqrt{gc})}{\sqrt{c}(gc - 4n^2\sin^2\gamma)(a\sqrt{c}\sin t\sqrt{gc} + \sqrt{g}\cos t\sqrt{gc})};$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{4n^2a\sqrt{g}\,\mathrm{T}\sin\gamma\cos\gamma + 2ng\sqrt{g}\,\mathrm{T}'\cos\gamma - 2ngt\cos\gamma}{gc - 4n^2\sin^2\gamma},$$
$$y = \frac{4n^2a\sqrt{g}\,\mathrm{T}'\sin\gamma\cos\gamma - 2ng\sqrt{g}\,\mathrm{T}\cos\gamma}{gc - 4n^2\sin^2\gamma}$$
$$- \frac{4n^2\sin\gamma\cos\gamma}{c(gc - 4n^2\sin^2\gamma)}\log\left(a\sqrt{\frac{c}{g}}\sin t\sqrt{gc} + \cos t\sqrt{gc}\right),$$

en faisant, pour abréger,

$$\int \frac{\sin(2nt\sin\gamma)\,dt}{a\sqrt{c}\sin t\sqrt{gc}+\sqrt{g}\cos t\sqrt{gc}} = \mathrm{T},$$
$$\int \frac{\cos(2nt\sin\gamma)\,dt}{a\sqrt{c}\sin t\sqrt{gc}+\sqrt{g}\cos t\sqrt{gc}} = \mathrm{T}',$$

et supposant que ces intégrales s'évanouissent avec t, afin qu'on ait $x = \text{o}$ et $y = \text{o}$, quand $t = \text{o}$.

Si la vitesse de projection a n'est pas extrêmement grande, le produit nt ne cessera pas d'être une petite fraction, et par la comparaison des valeurs de x et de y, on s'assurera facilement que la déviation y dans le sens du méridien, sera aussi très petite et négligeable, par rapport à la déviation x dans le sens du parallèle. Quant à celle-ci, si l'on néglige le cube de n dans son expression, et si l'on y supprime, en conséquence, le terme qui contient T, on aura

$$x = \frac{2n\cos\gamma}{c}(\mathrm{T}'\sqrt{g}-t),$$

où l'on prendra

$$\mathrm{T}' = \int \frac{dt}{a\sqrt{c}\sin t\sqrt{gc}+\sqrt{g}\cos t\sqrt{gc}},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\mathrm{T}'\sqrt{g} = a\int \frac{d.\cos t\sqrt{gc}}{(a^2c+g)\cos^2 t\sqrt{gc}-a^2c} - \sqrt{\frac{g}{c}}\int \frac{d.\sin t\sqrt{gc}}{(a^2c+g)\sin^2 t\sqrt{gc}-g}.$$

Ces intégrales s'obtiendront par les règles ordinaires: si on les étend depuis $t = \text{o}$ jusqu'à $t = \theta'$, et en ayant égard à la valeur de θ' du numéro précédent, on trouve, toutes réductions faites,

$$\mathrm{T}'\sqrt{g} = \frac{1}{2\sqrt{c(a^2c+g)}}\log\frac{\sqrt{a^2c+g}+a\sqrt{c}}{\sqrt{a^2c+g}-a\sqrt{c}};$$

et en désignant par δ' la déviation x qui répond à $t = \theta'$, ou au point le plus haut de la trajectoire, il en résultera

$$\delta' = \frac{2n\cos\gamma}{c}\left[\frac{1}{2\sqrt{c(a^2c+g)}}\log\frac{\sqrt{a^2c+g}+a\sqrt{c}}{\sqrt{a^2c+g}-a\sqrt{c}} - \theta'\right].$$

J'appellerai D′ ce point le plus élevé, et je désignerai par a' et b' les composantes parallèles aux axes des x et des y, de la vitesse horizontale dont le mobile sera animé en ce point. Leurs valeurs se déduiront de celles de $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$ qu'on vient de former, en y faisant $t=\theta'$; d'où il résultera

$$a' = \frac{2n\sqrt{g}\cos\gamma}{c\sqrt{a^2c+g}} - \frac{2n\cos\gamma}{c},$$

$$b' = \frac{4n^2(a-g\theta')\sin\gamma\cos\gamma}{c\sqrt{g(a^2c+g)}},$$

en négligeant toujours le cube de n. Cela étant, si l'on transporte l'origine des cordonnées en D′; que l'on compte les z dans le sens de la pesanteur, et le temps t à partir de l'époque où le mobile a atteint ce point D′, les déviations horizontales du mobile, pendant toute la durée de sa chute, seront exprimées par les formules du n° 6, en ayant égard aux termes relatifs aux vitesses a' et b' indiqués à la fin de ce numéro. Au degré d'approximation où nous nous arrêtons, ces termes, dans l'expression de x, se réduiront à

$$\left(\frac{4n\sqrt{g}\cos\gamma}{c\sqrt{a^2c+g}} - \frac{4n\cos\gamma}{c}\right)\int\frac{dt}{e^{t\sqrt{gc}}+e^{-t\sqrt{gc}}};$$

l'intégrale étant prise depuis $t=0$. Dans l'expression de y, ils auront n^2 pour facteur; en sorte que la déviation dans le sens du méridien continuera d'être très petite et négligeable par rapport à la déviation dans le sens du parallèle. En représentant par $\delta_{\prime}$ cette dernière déviation, comptée à partir de la verticale du point D′, et qui aura lieu quand le projectile sera retombé sur le sol, la valeur de $\delta_{,}$ se déduira de celle de δ du n° 7, en y faisant $t=\theta_{,}$, et y ajoutant la formule qu'on vient d'écrire, dans laquelle on étendra l'intégrale jusqu'à cette valeur de t. De cette manière, on aura

$$\delta_{,}=\frac{2n\cos\gamma}{c}\left[\theta_{,}+\frac{2(\sqrt{g}-2\sqrt{a^2c+g})}{\sqrt{gc}\sqrt{a^2c+g}}\left(\text{arc}\left(\text{tang}=e^{\theta_{,}\sqrt{gc}}\right)-\frac{1}{4}\pi\right)\right].$$

Le temps $\theta_{,}$ est ici celui de la chute totale du mobile, dont la valeur a été donnée dans le numéro précédent, et d'après laquelle l'expression de la déviation δ', pendant l'élévation du mobile, pourra s'écrire sous cette forme :

$$\delta'=\frac{2n\cos\gamma}{c}\left(\sqrt{\frac{g}{a^2c+g}}\,\theta_{,}-\theta'\right).$$

Maintenant, soit δ la déviation totale du projectile, comptée de son point de départ O et sur le sol, à l'*est* ou à l'*ouest* de ce point, selon que sa valeur sera positive ou négative ; nous aurons évidemment

$$\delta=\delta'+\delta_{,};$$

résultat que l'on pourra comparer à la mesure directe de cette quantité δ.

Dans le cas du vide ou de $c=0$, les équations (e) ne contiennent pas ds ; elles conviennent donc aux parties ascendante et descendante de la trajectoire ; et comme elles sont linéaires et à coefficients constants, on en peut déduire les valeurs exactes de x, y, z, en fonctions de t, par les règles ordinaires. Pour plus de simplicité, si l'on néglige le carré de n, on trouvera

$$x=\left(\frac{1}{3}gt^3-at^2\right)n\cos\gamma,\quad y=0,\quad z=at-\frac{1}{2}gt^2;$$

le temps t étant compté à partir du départ du projectile, c'est-à-dire, à partir de l'époque où $x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$, sont zéro, et où l'on a $\frac{dz}{dt} = a$. Quand le mobile sera retombé sur le sol, on aura encore $z = 0$; si donc on appelle toujours θ le temps entier de son élévation et de sa chute successives, et δ sa déviation totale dans le sens du parallèle, il en résultera

$$\theta = \frac{2a}{g}, \quad \delta = -\frac{4na^3 \cos \gamma}{3g^2}.$$

Cette valeur de δ montre que la déviation aura lieu à l'*ouest* du point O, et sera proportionnelle au cube de la vitesse de projection. On la déduit aussi de la somme des valeurs de δ' et $\delta_{,}$, en développant, suivant les puissances de c, d'abord les expressions de θ' et $\theta_{,}$, ce qui donne

$$\theta' = \frac{a}{g} - \frac{a^3 c}{3g^2} + \text{etc.}, \quad \theta_{,} = \frac{a}{g} - \frac{a^3 c}{6g^2} + \text{etc.};$$

puis celles de δ' et $\delta_{,}$; et faisant ensuite $c = 0$, d'où il résulte

$$\delta' = \delta_{,} = -\frac{2na^3 \cos \gamma}{3g^2};$$

en sorte que les deux déviations successives δ' et $\delta_{,}$ sont égales, dans le même sens, et moitié de la valeur de δ qu'il s'agissait de vérifier.

Pour $c = 0$, l'expression précédente de a' se réduit à

$$a' = -\frac{na^2 \cos \gamma}{g};$$

ce qui s'accorde aussi avec celle que l'on obtient en faisant $t = \frac{a}{g}$, dans l'expression de $\frac{dx}{dt}$ relative au mouvement dans le vide.

(10) Prenons pour exemple, comme précédemment,

$$\gamma = 50°53', \; g = 9{,}81075, \; \frac{1}{c} = 400{,}01,$$
$$a = 68{,}89, \quad \theta' = 5{,}318, \; \theta_{,} = 6{,}06;$$

nombres qui supposent que le mètre et la seconde sexagésimale soient les unités de longueur et de temps, et qui répondent à une élévation h' du mobile dans l'air, égale à $158^m,54$. A cause de

$$n = \frac{2\pi}{86164},$$

on trouvera pour ses déviations

$$\delta' = -0,045502, \quad \delta_{,} = -0,036471, \quad \delta = -0,081973;$$

de sorte qu'elles s'observeront à l'*ouest* du point O, et que celle qui a lieu pendant l'ascension du projectile surpassera l'autre d'environ 9 millimètres. On aura, en même temps,

$$a' = 0,012043,$$

pour la vitesse horizontale du mobile au point le plus haut de la trajectoire; et c'est à raison de cette vitesse, dirigée vers l'*ouest*, que dans cet exemple, le corps retombe à l'*ouest* du pied de la verticale de ce point, et non pas à l'*est*, comme dans le n° 7. La hauteur h' restant la même, on aurait, dans le vide,

$$a = 55,774, \quad \theta = 5,6851, \quad \delta = -0,110572;$$

ce qui fait voir que la résistance de l'air a diminué la déviation totale d'environ 28 millimètres.

Pour donner un second exemple, je supposerai que le projectile soit une balle de plomb lancée verticalement par un fusil d'infanterie, et que sa vitesse de projection soit

$$a = 434.$$

Si l'expérience est faite à Paris, on aura

$$\gamma = 48°50'14'', \quad g = 9,80896;$$

et pour plus d'exactitude, si l'on veut tenir compte de la perte de poids du mobile dans l'air, il faudra diminuer un peu cette valeur de g, et la réduire à $9,80750$.

En répétant l'expérience un grand nombre de fois, et observant à chaque épreuve la durée totale de l'élévation et de la chute successives du mobile, si l'on prend la moyenne de ces durées pour le temps θ, l'équation (g) fera connaître le coefficient c de la résistance, relatif au projectile dont on aura fait usage. Pour fixer les idées, je prendrai

$$c = 0,004;$$

valeur qui se déduit de celle qui avait lieu dans l'expérience de M. Reich, en admettant que ce coefficient soit en raison inverse de la densité et du diamètre du projectile, et que dans cette expérience, où il avait $0,0025$ pour valeur, la densité du mobile était environ les deux tiers de celle du plomb, et son diamètre à peu près deux fois et demie celui d'une balle de fusil; ce qui donne $0,0025 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{2}$, ou à peu près $0,004$, pour la valeur de c relative à cette balle. Les unités de temps et de longueur sont les mêmes que dans l'exemple précédent.

Cela posé, par les formules des n^{os} 8 et 9, on trouvera

$$h' = 544,28, \quad a' = -0,0208, \quad a_{\prime} = 49,201,$$
$$\theta' = 7,3567, \quad \theta_{\prime} = 14,474,$$

pour la hauteur à laquelle le projectile parviendra, sa vitesse horizontale au point le plus haut, la vitesse verticale qu'il acquiert en retombant, les durées de son élévation et de sa chute successives, qui sont, comme on voit, très inégales. On en conclura ensuite

$$\delta' = -0,13404, \quad \delta_{\prime} = 0,01439, \quad \delta = -0,09965.$$

La déviation $\delta_{\prime}$, qui a lieu pendant la chute du mobile, se ferait donc à l'*est* du point O; ce qui signifie que la vitesse horizontale, acquise à l'*ouest* pendant l'élévation, ne suffirait pas, comme dans l'exemple précédent, pour rendre la valeur de $\delta_{\prime}$ négative. Dans le vide, on aurait, pour la même vitesse de projection,

$$h' = 9601, \quad a' = -0{,}9217, \quad a_{\prime} = a = 434,$$
$$\theta' = \theta_{\prime} = 44{,}245, \quad \delta' = \delta_{\prime} = -27{,}186, \quad \delta = -54{,}372;$$

où l'on voit combien les résultats seraient différents de ceux qui ont lieu dans l'air, surtout à l'égard de la déviation δ que la résistance du fluide réduit à environ un 500e de sa valeur dans le vide.

Les auteurs qui ont écrit sur la *Balistique* ne s'accordent pas sur le coefficient c de la résistance de l'air: plusieurs même le supposent dépendant de la vitesse du mobile; ce qui revient à considérer la résistance comme n'étant pas proportionnelle au carré de cette vitesse. D'après son expression le plus généralement adoptée, et que j'ai citée dans mon *Traité de Mécanique,* on a

$$c = \frac{9\rho}{20d};$$

ρ étant le rapport de la densité de l'air à celle du projectile, et d son diamètre, exprimé en mètres. Le rapport de la densité du plomb à celle de l'eau étant 11,352, et en prenant 825 pour celui de la densité de l'eau à la densité de l'air, qui répond à la température, à la pression et au degré d'humidité ordinaires, on aura, à peu près,

$$\rho = \frac{1}{9400};$$

et si le diamètre de la balle est

$$d = 0{,}01635,$$

il en résultera

$$c = 0{,}0029275,$$

ou environ les trois-quarts de la valeur de c, dont nous venons de faire usage. Toutes les autres données restant les mêmes, on trouve

$$\delta' = -0,20785, \quad \delta_{,} = -0,00014, \quad \delta = -0,2099,$$

c'est-à-dire une valeur de δ à peu près double de celle que nous avions obtenue. C'est d'après cette valeur de ρ qu'on a effectué plus haut, la diminution de valeur de g, due au poids de l'air déplacé par la balle.

(11). Considérons actuellement le cas général où le mobile est lancé du point O, suivant une direction quelconque, qui fait avec l'axe vertical Oz, un angle donné b; et désignons par a sa vitesse initiale.

Soit OA la projection horizontale de cette direction; appelons ϵ l'angle AOx que fait OA avec l'axe Ox des x positives (n° 4); angle qui sera compté vers le *nord* à partir de Ox, ou à la gauche de l'observateur placé en O et tourné vers l'*est*, et qui pourra s'étendre depuis zéro jusqu'à 360°. Par le point O, menons une autre droite horizontale OB, perpendiculaire à OA, et telle que l'angle BOx soit égal à $\epsilon + 90°$. En désignant par u et v les deux coordonnées horizontales du point quelconque M de la trajectoire, rapportées à ces axes OA et OB, on aura

$$x = u\cos\epsilon - v\sin\epsilon, \quad y = u\sin\epsilon + v\cos\epsilon,$$

pour les valeurs de ses anciennes coordonnées x et y.

Si l'on n'avait point égard à la rotation de la Terre, ou à la fraction n, le projectile ne sortirait pas du plan vertical des axes OA et Oz; pendant toute la durée du mouvement, l'ordonnée v et la vitesse $\frac{dv}{dt}$, perpendiculaires à ce plan, seront donc des quantités de l'ordre de petitesse de n; nous négligerons, en conséquence, les carrés et le produit de $\frac{dv}{dt}$ et de n. Nous aurons alors

$$\frac{ds^2}{dt^2} = \frac{du^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2};$$

et les équations (e) deviendront

$$\frac{d^2u}{dt^2}\cos \epsilon - \frac{d^2v}{dt^2}\sin \epsilon = 2n\frac{du}{dt}\sin\epsilon\sin\gamma - 2n\frac{dz}{dt}\cos\gamma$$
$$-c\frac{ds}{dt}\frac{du}{dt}\cos\epsilon + c\frac{ds}{dt}\frac{dv}{dt}\sin\epsilon,$$
$$\frac{d^2u}{dt^2}\sin\epsilon + \frac{d^2v}{dt^2}\cos\epsilon = -2n\frac{du}{dt}\cos\epsilon\sin\gamma - c\frac{ds}{dt}\frac{du}{dt}\sin\epsilon - c\frac{ds}{dt}\frac{dv}{dt}\cos\epsilon,$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = 2n\frac{du}{dt}\cos\epsilon\cos\gamma - g - c\frac{ds}{dt}\frac{dz}{dt},$$

ou, plus simplement,

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2u}{dt^2} + c\frac{ds}{dt}\frac{du}{dt} = -2n\frac{dz}{dt}\cos\epsilon\cos\gamma,\\
&\frac{d^2v}{dt^2} + c\frac{ds}{dt}\frac{dv}{dt} = -2n\frac{du}{dt}\sin\gamma + 2n\frac{dz}{dt}\sin\epsilon\cos\gamma,\\
&\frac{d^2z}{dt^2} + c\frac{ds}{dt}\frac{dz}{dt} + g = 2n\frac{du}{dt}\cos\epsilon\cos\gamma.
\end{aligned}\right\} \qquad (h)$$

Pour déterminer les six constantes arbitraires que renfermeront les intégrales de ces trois équations, on aura, pour $t=0$, les six conditions initiales :

$$u=0,\ v=0,\ z=0,\ \frac{du}{dt}=a\cos\alpha,\ \frac{dv}{dt}=0,\ \frac{dz}{dt}=a\sin\alpha,$$

où l'on a fait $b=90^\circ-\alpha$, de sorte que α soit l'angle compris entre la direction de la vitesse a et sa projection OA, qui sera positif ou négatif, selon que le mobile aura été lancé au-dessus ou au-dessous du plan horizontal, mené par le point O.

(12). Si l'angle α est positif et très petit, la trajectoire s'écartera aussi très peu de la droite OA, tant que le projectile sera au-dessus de ce plan horizontal. Dans cette partie de la courbe, on pourra négliger le carré de $\frac{dz}{dt}$; et comme la différentielle du sera constamment positive, on aura alors $ds = du$.

En négligeant également le produit $n\,\frac{dz}{dt}$, les équations (h) se réduiront à

$$\frac{d^2u}{dt^2} + c\,\frac{du^2}{dt^2} = 0,$$
$$\frac{d^2v}{dt^2} + c\,\frac{du}{dt}\,\frac{dv}{dt} = -\,2n\,\frac{du}{dt}\sin\gamma,$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} + c\,\frac{du}{dt}\,\frac{dz}{dt} = -g + 2n\,\frac{du}{dt}\cos\epsilon\,\cos\gamma;$$

ou bien, en faisant

$$\frac{du}{dt} = u', \quad \frac{dv}{dt} = v', \quad \frac{dz}{dt} = z',$$

et observant qu'on aura

$$\frac{d^2u}{dt^2} = u'\,\frac{du'}{du}, \quad \frac{d^2v}{dt^2} = u'\,\frac{dv'}{du}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = u'\,\frac{dz'}{du},$$

il en résultera

$$\frac{du'}{du} + cu' = 0,$$
$$\frac{dv'}{du} + cv' = -\,2n\sin\gamma.$$
$$\frac{dz'}{du} + cz' = -\,\frac{g}{u'} + 2n\cos\epsilon\cos\gamma.$$

En même temps, les conditions initiales qui serviront à déterminer les constantes arbitraires, dans les intégrales de ces trois équations différentielles du premier ordre, seront

$$u' = a, \quad v' = 0, \quad z' = a\alpha,$$

pour $u = 0$, en négligeant le carré de α.

De cette manière, on trouvera, sans difficulté,

$$u' = ae^{-cu},$$
$$v' = -\,\frac{2n\sin\gamma}{c}\left(1 - e^{-cu}\right),$$
$$z' = a\alpha e^{-cu} - \frac{g}{2ac}\left(e^{cu} - e^{-cu}\right) + \frac{2n\cos\epsilon\cos\gamma}{c}\left(1 - e^{-cu}\right).$$

La première de ces formules donne

$$dt = \frac{1}{a} e^{cu}\, du;$$

d'où l'on tire

$$t = \frac{1}{ac}\left(e^{cu} - 1\right), \quad u = \frac{1}{c} \log(1 + act).$$

A cause de

$$v' = \frac{dv}{du} u', \quad z' = \frac{dz}{du} u',$$

nous aurons aussi

$$dv = -\frac{2n \sin \gamma}{ac}\left(e^{cu} - 1\right) du,$$

$$dz = \alpha du - \frac{g}{2a^2 c}\left(e^{2cu} - 1\right) du + \frac{2n \cos \mathrm{C} \cos \gamma}{ac}\left(e^{cu} - 1\right) du;$$

et en intégrant et déterminant les constantes arbitraires, il en résultera

$$v = -\frac{2n \sin \gamma}{ac^2}\left(e^{cu} - cu - 1\right),$$

$$z = \alpha u - \frac{g}{4a^2c^2}\left(e^{2cu} - 2cu - 1\right) + \frac{2n \cos \mathrm{C} \cos \gamma}{ac^2}\left(e^{cu} - cu - 1\right).$$

Ces deux dernières équations seront celles de la trajectoire à double courbure; en y joignant la valeur de u en fonction de t, elles feront connaître les trois coordonnées, ou la position du mobile à un instant quelconque.

(13). Pour en énoncer les conséquences, menons par le point O, un plan perpendiculaire à OA et un plan horizontal.

Soit ϖ la distance au premier plan, du lieu E où le projectile retombera sur le second; cette distance ϖ exprimera la *portée* horizontale; et comme ce sera la valeur de u qui répondra à $z = 0$, on aura, pour la déterminer, l'équation transcendante :

$$\alpha\varpi - \frac{g}{4a^2c^2}\left(e^{2c\varpi} - 2c\varpi - 1\right) + \frac{2n \cos \mathrm{C} \cos \gamma}{ac^2}\left(e^{c\varpi} - c\varpi - 1\right) = 0, \quad (i)$$

que l'on résoudra par des essais, lorsque les valeurs numériques des quantités différentes de ϖ qu'elle contient, seront données, et qui fera connaître, réciproquement, l'*angle du tir*, ou l'angle α, qui correspond à une valeur aussi donnée de ϖ.

Si cette portée et cet angle se rapportent d'abord au cas où l'on a tiré dans le plan du méridien, on aura $\mathcal{C} = 90^\circ$ ou $\mathcal{C} = 270^\circ$, selon que ce tir aura eu lieu vers le nord ou vers le midi; et, dans les deux cas, n disparaîtra de l'équation précédente qui se réduira à

$$\alpha\varpi - \frac{g}{4a^2c^2}\left(e^{2c\varpi} - 2c\varpi - 1\right) = 0. \qquad (j)$$

Soit ensuite $\varpi + u$, ce que devient la portée lorsque l'on tire sous le même angle α, et avec la même vitesse a, dans un autre plan vertical; selon que la quantité u sera positive ou négative, elle exprimera l'augmentation ou la diminution de la portée, due au mouvement de la terre; et si l'on néglige son carré, ainsi que le produit nu, dans l'équation (i), on en déduira

$$u = \frac{2na\cos\mathcal{C}\cos\gamma\left(e^{c\varpi} - c\varpi - 1\right)}{\frac{1}{2}gc\left(e^{2c\varpi} - 1\right) - \alpha a^2c^2}.$$

Soit aussi $\alpha + \varepsilon$ l'angle sous lequel il faudra tirer dans cet autre plan, pour que la portée reste égale à ϖ, de sorte que ε soit l'augmentation positive ou négative de l'angle du tir, due au mouvement de la terre; l'équation (i) donnera immédiatement

$$\varepsilon = -\frac{2n\cos\mathcal{C}\cos\gamma}{ac^2\varpi}\left(e^{c\varpi} - c\varpi - 1\right).$$

Le point de chute E appartenant à la branche descendante de la trajectoire, la vitesse $\frac{dz}{dt}$ y sera négative; ce qui rend positif, d'après la valeur trouvée pour z', le dénominateur de l'expression de u, et cette expression, de même signe que $\cos\mathcal{C}$, tandis que celle de ε sera de signe contraire. Il s'ensuit que si l'on tire, par exemple dans un plan vertical.

tangent au plan du parallèle, et sous le même angle α que dans le plan du méridien, la portée ϖ sera augmentée ou diminuée, selon que ce tir aura lieu vers l'*est* ou vers l'*ouest;* et pour atteindre à la même portée, il en résulte aussi qu'il faudra diminuer l'angle α, quand on tirera vers l'*est*, et l'augmenter, lorsque l'on tirera vers l'*ouest*.

L'angle α restant le même, et le tir ayant lieu dans le plan vertical qui répond à l'angle AOx égal à ϵ, si l'on appelle ζ la valeur de l'ordonnée z correspondante à $u = \varpi$, et qu'on ait égard à l'équation (j) et à la valeur de ε, on en conclura

$$\zeta = \frac{2n \cos \epsilon \cos \gamma}{ac^2} \left(e^{c\varpi} - c\varpi - 1\right) = -\varepsilon\varpi.$$

Enfin, soit λ la valeur de v qui répond à $u = \varpi$, ou la déviation horizontale du projectile, mesurée par la perpendiculaire abaissée du point E sur la droite OA ; nous aurons

$$\lambda = -\frac{2n \sin \gamma}{ac^2} \left(e^{c\varpi} - c\varpi - 1\right).$$

Cette quantité étant indépendante de ϵ, et toujours négative, cela montre que la déviation dont il s'agit tombera sur le prolongement de l'axe OB, c'est-à-dire à droite de l'axe OA, en regardant du point O vers le point E. Par conséquent, si l'on fait coïncider successivement la ligne OA, avec les quatre demi-axes des x et y, ou, autrement dit, si l'on tire successivement vers l'*est,* le *nord,* l'*ouest* et le *midi,* les déviations horizontales du projectile auront lieu respectivement, vers le *midi,* l'*est,* le *nord* et l'*ouest*, en conservant une grandeur constante.

On peut remarquer qu'il existera entre les quantités ζ et λ, ce rapport très simple :

$$\zeta = -\lambda \cos \epsilon \cot \gamma,$$

qui ne dépendra que de l'angle ϵ et de la latitude γ du lieu de l'observation.

(14). Appliquons ces différents résultats au tir à la *cible*. Pour cela, supposons le centre C de la cible, placé sur la droite OA, et son plan perpendiculaire à cette droite; dans ce plan, menons par le point C, deux droites, l'une horizontale, et l'autre verticale; supposons que le soldat, qui tire du point O, vise de son mieux vers le point C, et que le fusil soit *juste,* ou n'ait, par sa construction, aucune tendance à abaisser ou élever les coups, ni à les faire dévier à droite ou à gauche. On prendra la distance donnée OC pour la valeur de ϖ; et les quantités a et c étant aussi données, on calculera l'angle α au moyen de l'équation (j). Or, à raison du mouvement de la terre, le point C', où le centre de la balle atteindra le plan de la cible, suffisamment étendu, s'écartera du point C, et ses coordonnées rapportées aux deux lignes menées par ce dernier point, ou, plus exactement, leurs valeurs moyennes, déduites d'un très grand nombre d'épreuves, seront les quantités ζ et λ.

Cela posé, si l'on mesure à chaque épreuve, les coordonnées de C'; que l'on regarde comme positives, celles qui tombent, soit au-dessus de la ligne horizontale, soit à gauche, par rapport au soldat, de la ligne verticale, et comme négatives, celles qui tombent, soit au-dessous, soit à droite; et si l'on désigne par m et par μ, les sommes de toutes ces ordonnées verticales et de toutes ces abscisses horizontales, divisées par le nombre total des épreuves, supposé très grand, on aura, à très peu près et très probablement (*)

$$m = \zeta, \qquad \mu = \lambda.$$

Quelle que soit la direction du tir, ou la grandeur de l'angle ϵ, la déviation moyenne μ aura lieu à la droite du soldat, et convergera vers la quantité λ, négative et indépendante de ϵ. Mais la moyenne m variera avec cet angle : elle sera nulle, quand on tirera dans le plan du

(*) Voyez, sur ce point, mon Mémoire sur la *Probabilité du Tir à la Cible,* inséré dans le n° IV du *Mémorial de l'Artillerie.*

méridien; elle atteindra son *maximum* dans le plan tangent à celui du parallèle, et répondra à un point C′, situé au-dessus ou au-dessous de la ligne horizontale, menée par le point C, selon qu'on tirera vers l'*est* ou vers l'*ouest*. Si l'on veut que cette moyenne m soit nulle dans un plan vertical quelconque, comme dans le méridien, il faudra pour chaque angle β, augmenter la distance AC, de la quantité n, en conservant le même angle α, ou bien augmenter cet angle, de la quantité ε, en conservant la même distance AC.

Voyons maintenant quelles peuvent être les valeurs numériques de ces déviations ζ et λ, et s'il sera nécessaire d'y avoir égard dans la pratique.

Comme dans le dernier exemple du n° 10, je prends 434 mètres par seconde, pour la vitesse de projection a, et la même valeur de c, ou, ce qui en diffère très peu, je fais $c = 0{,}003$ pour la commodité du calcul. Je prends aussi 200 mètres pour la distance OC, ou la valeur de ϖ. Au moyen de ces nombres et de la valeur de g, l'équation (j) donne

$$\alpha = 27'\,50''.$$

On trouve, en même temps,

$$\lambda = -\,0{,}0062, \quad \zeta = (0{,}0054)\cos\beta,$$

en prenant pour γ la latitude de Paris. Or, ces déviations ne sont pas assez considérables pour influer sensiblement sur la justesse du tir, ni même pour qu'on puisse les apprécier dans les moyennes de longues séries d'épreuves.

Dans le vide, on aurait

$$\alpha = \frac{g\varpi}{2a^2}, \qquad \lambda = -\frac{n\varpi^2\sin\gamma}{a};$$

et en employant les données précédentes, on en déduirait

$$\alpha = 17'\,56'', \quad \lambda = -\,0{,}0049, \quad \zeta = (0{,}0044)\cos\beta;$$

7..

quantités moindres que leurs analogues dans l'air, de sorte que, pour une même portée et une même vitesse initiale, la résistance du fluide augmente l'angle du tir et les déviations du projectile dues au mouvement de la terre.

(15). A cause de la petitesse de la fraction n, on peut, quel que soit l'angle α, déduire des équations (h), des valeurs très approchées de x, y, z. Nous allons en donner les expressions, en nous bornant aux termes dépendants de la première puissance de cette fraction, dont on a déjà négligé le carré pour parvenir à ces équations.

En négligeant d'abord tout-à-fait la fraction n, on sera dispensé d'avoir égard à la seconde équation (h), et les deux autres se réduiront aux équations ordinaires de la *Balistique*, savoir,

$$\frac{d^2u}{dt^2} + c\frac{ds}{dt}\frac{du}{dt} = 0,$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} + c\frac{ds}{dt}\frac{dz}{dt} + g = 0.$$

on tire de la première,

$$\frac{du}{dt} = a\cos\alpha\, e^{-cs},$$

en comptant l'arc s à partir du point de départ O, et observant qu'on a alors $\frac{du}{dt} = a\cos\alpha$ pour $s = 0$. Si l'on fait ensuite

$$\frac{dz}{dt} = p\frac{du}{dt},$$

la seconde des équations précédentes deviendra

$$\frac{dp}{dt}\frac{du}{dt} = -g;$$

et d'après la valeur de $\frac{du}{dt}$, il en résultera

$$\frac{dp}{du} = -\frac{ge^{2cs}}{a^2\cos^2\alpha}. \qquad (k)$$

On aura, en même temps,

$$p = \frac{dz}{du};$$

en sorte que p sera la tangente de l'angle que la tangente à la trajectoire, au point quelconque M et prolongée jusqu'à l'axe des u, fait avec cet axe. Au point O, on aura $p = \text{tang}\,\alpha$; dans la branche ascendante de cette courbe, p sera une quantité positive et décroissante; au point le plus haut, on aura $p = 0$; dans la branche descendante, p se changera en une quantité négative et croissante. Au point E où le mobile retombe sur la droite OA, si l'on désigne par α' l'angle aigu compris entre EO et la tangente à la trajectoire, et par ϖ la longueur de EO, on aura $p = -\text{tang}\,\alpha'$ pour $u = \varpi$: on appelle α et α', l'angle de *tir* et l'angle de *chute*, et ϖ la *portée*; dans le vide on aurait

$$\alpha' = \alpha, \quad \varpi = \frac{a^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

L'équation (k) ne contenant, ni le temps t, ni sa différentielle dt, est celle de la trajectoire; et comme on a

$$\sqrt{1 + p^2}\, du = ds,$$

si on la multiplie membre à membre par cette autre équation, et qu'on intègre ensuite, on aura

$$p\sqrt{1 + p^2} + \log\left(p + \sqrt{1 + p^2}\right) = k - \frac{g e^{2cs}}{ca^2 \cos^2 \alpha}; \qquad (l)$$

k étant la constante arbitraire, dont la valeur se déterminera en faisant $s = 0$ et $p = \text{tang}\,\alpha$, et sera, en conséquence,

$$k = \text{tang}\,\alpha\sqrt{1 + \text{tang}^2\alpha} + \log\left(\text{tang}\,\alpha + \sqrt{1 + \text{tang}^2\alpha}\right) + \frac{g}{ca^2 \cos^2 \alpha}.$$

Cette équation (l) fera connaître l'arc OM de la trajectoire, en fonction de la variable p qui se rapporte à son extrémité M. En la combinant avec les formules précédentes, et faisant, pour abréger

$$k - p\sqrt{1+p^2} - \log\left(p + \sqrt{1+p^2}\right) = P^2,$$

on en déduira, sans difficulté,

$$du = -\frac{dp}{P^2 c}, \quad dz = -\frac{pdp}{P^2 c}, \quad dt = -\frac{dp}{P\sqrt{gc}}; \quad (m)$$

équations qui donneront par les *quadratures*, les valeurs numériques des coordonnées de chaque point M de la trajectoire, et du temps t que le mobile emploiera pour décrire l'arc OM. On en déduit aussi

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{g(1+p^2)}}{P\sqrt{c}},$$

pour la valeur de la vitesse du mobile en ce point M, qui s'exprimera, comme on voit, sous forme finie. Au point le plus haut, par exemple, où l'on a $p = 0$, on aura

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\frac{g}{ck}}.$$

Le rayon de courbure au point quelconque M s'exprime également en fonction de p; en le désignant par R, on a

$$R = -\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}\, du}{dp},$$

et, par conséquent,

$$R = \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{P^2 c}.$$

Il en résulte que si l'on appelle f la force centrifuge en ce même point, on aura

$$f = \frac{1}{R}\,\frac{ds^2}{dt^2} = \frac{g}{\sqrt{1+p^2}};$$

de sorte qu'au point le plus haut, elle est égale à la gravité, ce qui doit être, en effet, puisque ces deux forces s'y font équilibre, quelle que soit la résistance de l'air, qui leur est perpendiculaire.

Si nous faisons

$$\tang \alpha = \omega, \quad \tang \alpha' = \omega',$$

et si nous désignons par θ le temps entier du trajet du projectile, au-dessus de la droite OA, ou depuis le point O jusqu'au point E, les valeurs de ϖ et θ s'obtiendront en intégrant celles de du et dt, depuis $p = \omega$ jusqu'à $p = -\omega'$, ou, ce qui est la même chose, depuis $p = -\omega'$ jusqu'à $p = \omega$, en changeant les signes des résultats; ce qui donne

$$\varpi = \frac{1}{c}\int_{-\omega'}^{\omega} \frac{dp}{P^2}, \quad \theta = \frac{1}{\sqrt{gc}}\int_{-\omega'}^{\omega} \frac{dp}{P}.$$

Et comme au point E, on a $z = 0$, on aura, en outre, cette équation transcendante :

$$\int_{-\omega'}^{\omega} \frac{pdp}{P^2} = 0,$$

qui servira à déterminer la valeur numérique de ω', quand celles de ω et de k seront données.

Sans la résoudre, on en peut conclure que l'on aura $\omega' > \omega$, ou que l'angle de chute surpassera toujours l'angle de tir. En effet, j'écris d'abord cette équation sous la forme

$$\int_0^{\omega} \frac{pdp}{P^2} - \int_0^{-\omega'} \frac{pdp}{P^2} = 0;$$

puis je mets $-p$ et $-dp$ à la place de p et dp dans la seconde intégrale; ses limites deviennent zéro et ω'; et il en résulte

$$\int_0^{\omega} \frac{pdp}{P^2} = \int_0^{\omega'} \frac{pdp}{Q^2}, \qquad (n)$$

où l'on désigne par Q ce que P devient par le changement de signe de p, de sorte qu'on ait

$$Q^2 = k + p\sqrt{1+p^2} + \log\left(p + \sqrt{1+p^2}\right),$$

en observant qu'on a identiquement,

$$\log\left(-p + \sqrt{1+p^2}\right) + \log\left(p + \sqrt{1+p^2}\right) = 0.$$

Or, pour une même valeur de p, cette quantité Q^2 surpasse P^2; les éléments de la seconde intégrale sont donc moindres que ceux de la première; par conséquent, pour qu'elles soient égales, il faut que les limites de la première soient moins étendues que celles de la seconde ou qu'on ait $\omega < \omega'$; ce qu'il s'agissait de prouver.

Chacune de ces deux intégrales divisée par c, exprime la plus grande hauteur à laquelle le mobile s'élève dans l'air; en sorte que l'on a

$$Z = \frac{1}{c}\int_0^{\omega} \frac{p\,dp}{P^2},$$

en désignant par Z cette hauteur *maxima*.

(16). Pour avoir égard maintenant aux seconds membres des équations (h), je désigne, en général, par la caractéristique δ, placée devant une inconnue quelconque, la partie de sa valeur qui dépend de n. Cela étant, il faudra substituer dans leurs premiers membres, les valeurs de $\frac{du}{dt}$ et $\frac{dz}{dt}$ que l'on vient d'obtenir, augmentées de $\delta\frac{du}{dt}$ et $\delta\frac{dz}{dt}$, et y mettre $\delta\frac{dv}{dt}$ au lieu de $\frac{dv}{dt}$; mais puisqu'on doit négliger le carré de n, il suffira d'employer, dans les seconds membres, ces valeurs précédentes de $\frac{du}{dt}$ et $\frac{dz}{dt}$; et de cette manière, en multipliant ces équations par dt, nous aurons

$$d.\delta\frac{du}{dt}+cds.\delta\frac{du}{dt}=\frac{2npdp}{cP^2}\cos\epsilon\cos\gamma,$$
$$d.\delta\frac{dv}{dt}+cds.\delta\frac{dv}{dt}=\frac{2ndp}{cP^2}\sin\gamma-\frac{2npdp}{cP^2}\sin\epsilon\cos\gamma,$$
$$d.\delta\frac{dz}{dt}+cds.\delta\frac{dz}{dt}=-\frac{2ndp}{cP^2}\cos\epsilon\cos\gamma.$$

On simplifiera ces équations, en faisant

$$\delta\frac{du}{dt}=u_{,}e^{-cs},\quad \delta\frac{dv}{dt}=v_{,}e^{-cs},\quad \delta\frac{dz}{dt}=z_{,}e^{-cs}.$$

En les multipliant ensuite par e^{cs}, et ayant égard à l'équation (l) de laquelle on tire

$$e^{cs}=\frac{a\sqrt{c}\cos\alpha}{\sqrt{g}}\,P,$$

elles deviendront

$$du_{,}=\frac{2napdp}{P\sqrt{gc}}\cos\alpha\cos\epsilon\cos\gamma,$$
$$dv_{,}=\frac{2nadp}{P\sqrt{gc}}\cos\alpha\sin\gamma-\frac{2napdp}{P\sqrt{gc}}\cos\alpha\sin\epsilon\cos\gamma,$$
$$dz_{,}=-\frac{2nadp}{P\sqrt{gc}}\cos\alpha\cos\epsilon\cos\gamma.$$

De ces formules, jointes aux précédentes, on conclura

$$\delta\frac{du}{dt}=\frac{2n\cos\epsilon\cos\gamma}{cP}\int\frac{pdp}{P},$$
$$\delta\frac{dv}{dt}=\frac{2n\sin\gamma}{cP}\int\frac{dp}{P}-\frac{2n\sin\epsilon\cos\gamma}{cP}\int\frac{pdp}{P},$$
$$\delta\frac{dz}{dt}=-\frac{2n\cos\epsilon\cos\gamma}{cP}\int\frac{dp}{P};$$

les intégrales étant prises de manière qu'elles s'évanouissent à l'origine du mouvement, ou quand $p=\omega$, attendu que les valeurs de $\frac{du}{dt}$ et $\frac{dz}{dt}$ du numéro précédent, et $\frac{dv}{dt}=\delta\frac{dv}{dt}=0$, satisfont déjà aux conditions de la vitesse initiale. Quant à l'accroissement de la vitesse même, il se déduira de ceux de ses composantes en observant que d'après l'expression de $\frac{ds^2}{dt^2}$ du n° 11, on a

$$\delta\frac{ds}{dt}=\frac{du}{ds}\delta\frac{du}{dt}+\frac{dz}{ds}\delta\frac{dz}{dt}=\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\left(\delta\frac{du}{dt}+p\delta\frac{dz}{dt}\right);$$

d'où l'on conclut

$$\delta\frac{ds}{dt}=\frac{2n\cos\theta\cos\gamma}{c\mathrm{P}\sqrt{1+p^2}}\left(\int\frac{pdp}{\mathrm{P}}-p\int\frac{dp}{\mathrm{P}}\right).$$

En intervertissant l'ordre des caractéristiques d et δ, on a

$$\delta\frac{du}{dt}=\frac{d\delta u}{dt},\quad \delta\frac{dv}{dt}=\frac{d\delta v}{dt},\quad \delta\frac{dz}{dt}=\frac{d\delta z}{dt}.$$

Si donc on multiplie les équations précédentes par dt; que l'on y mette pour cette différentielle, la troisième formule (m); et que l'on intègre ensuite, on aura

$$\begin{aligned}
\delta u &= -\frac{2n\cos\theta\cos\gamma}{c\sqrt{gc}}\int\left(\frac{dp}{\mathrm{P}^2}\int\frac{pdp}{\mathrm{P}}\right),\\
\delta v &= -\frac{2n\sin\gamma}{c\sqrt{gc}}\int\left(\frac{dp}{\mathrm{P}^2}\int\frac{dp}{\mathrm{P}}\right)+\frac{2n\sin\theta\cos\gamma}{c\sqrt{gc}}\int\left(\frac{dp}{\mathrm{P}^2}\int\frac{pdp}{\mathrm{P}}\right),\\
\delta z &= \frac{2n\cos\theta\cos\gamma}{c\sqrt{gc}}\int\left(\frac{dp}{\mathrm{P}^2}\int\frac{dp}{\mathrm{P}}\right);
\end{aligned}$$

les secondes intégrales s'évanouissant aussi quand $p=\omega$.

De ces trois formules, on déduit cette équation

$$\sin\theta\cos\gamma\,\delta u+\cos\theta\cos\gamma\,\delta v+\cos\gamma\,\delta z=0,$$

indépendante de n, et qui fait voir qu'au degré d'approximation où nous arrêtons, la rotation de la terre n'augmente ni ne diminue la distance du projectile, pendant toute la durée de son mouvement, au plan du parallèle passant par le point O.

(17). Dans chacune de ces mêmes formules, les deux intégrales successives peuvent être considérées comme des intégrales définies, prises depuis ω jusqu'à p, ou, si l'on veut, depuis p jusqu'à ω, afin de rendre la variable p croissante et sa différentielle positive dans toute l'étendue des intégrations.

Si l'on étend ensuite la seconde intégrale depuis $p=-\omega'$ jusqu'à $p=\omega$ dans la première formule, et seulement depuis $p=0$ jusqu'à $p=\omega$ dans la troisième, on aura les accroissements de la portée et de la hauteur *maxima* dus au mouvement de la terre, savoir :

$$\delta\varpi = -\frac{2n\cos\epsilon\cos\gamma}{c\sqrt{gc}}\int_{-\omega'}^{\omega}\left(\frac{dp}{P^2}\int_p^{\omega}\frac{pdp}{P}\right),$$
$$\delta Z = \frac{2n\cos\epsilon\cos\gamma}{c\sqrt{gc}}\int_0^{\omega}\left(\frac{dp}{P^2}\int_p^{\omega}\frac{dp}{P}\right);$$

quantités qui s'évanouiront l'une et l'autre dans le plan du méridien où l'on a $\cos\epsilon=0$.

De même, si nous faisons, pour abréger,

$$V = -\frac{2n\sin\gamma}{c\sqrt{gc}}\int_{-\omega'}^{\omega}\left(\frac{dp}{P^2}\int_p^{\omega}\frac{dp}{P}\right),$$
$$V' = \frac{2n\cos\gamma}{c\sqrt{gc}}\int_{-\omega'}^{\omega}\left(\frac{dp}{P^2}\int_p^{\omega}\frac{pdp}{P}\right);$$

si, de plus, nous désignons par Δ la déviation totale du projectile, d'un côté ou de l'autre de OA, c'est-à-dire la distance du point E où il retombera sur le plan horizontal mené par le point O, à cette ligne OA, nous aurons

$$\Delta = V + V'\sin\epsilon;$$

et cette déviation s'observera à la gauche ou à la droite de l'observateur

8..

placé en O, et tourné vers OA, selon que sa valeur sera positive ou négative. Le premier terme V exprimera cette valeur, quand le tir aura lieu dans la direction du parallèle; et cette quantité, d'après son expression, étant toujours négative dans notre hémisphère où la latitude γ est positive, il s'ensuit que la déviation s'observera alors vers le *midi* ou vers le *nord,* selon que l'on tirera vers l'*est* ou vers l'*ouest*: ce sera le contraire, comme cela doit être, dans l'autre hémisphère. Le second terme $V'\sin 6$ exprimera l'excès, positif ou négatif, de la déviation, lorsque l'on tirera dans un autre plan, sur la déviation relative au plan vertical tangent au parallèle.

Au point E, l'angle de chute $\omega'+\delta\omega'$ devra être tel que l'on ait $z+\delta z=0$; par conséquent, si l'on met $\omega'+\delta\omega'$ au lieu de ω dans l'expression de z, et que l'on étende, dans celle de δz, la seconde intégrale depuis $p=-\omega'$ jusqu'à $p=\omega$, on aura

$$\frac{1}{c}\int_{-\omega'-\delta\omega'}^{\omega}\frac{pdp}{P^2}+\frac{2n\cos 6\cos\gamma}{c\sqrt{gc}}\int_{-\omega'}^{\omega}\left(\frac{dp}{P^2}\int_{p}^{\omega}\frac{dp}{P}\right)=0;$$

en négligeant le carré de $\delta\omega'$, et désignant par P' ce que P devient quand on y fait $p=-\omega'$, on a, d'ailleurs,

$$\int_{-\omega'-\delta\omega'}^{\omega}\frac{pdp}{P^2}=\int_{-\omega'}^{\omega}\frac{pdp}{P^2}-\frac{\omega'\delta\omega'}{P'^2};$$

et comme cette dernière intégrale est rendue nulle par la valeur de ω', il en résultera

$$\delta\omega'=\frac{2n\cos 6\cos\gamma}{\omega'\sqrt{gc}}\,P'^2\int_{-\omega'}^{\omega}\left(\frac{dp}{P^2}\int_{p}^{\omega}\frac{dp}{P}\right),$$

pour la partie de l'angle de chute, due au mouvement de la terre.

Enfin, si l'on met $\omega'+\delta\omega'$ à la place de ω', dans l'expression de θ, et que l'on néglige le carré de $\delta\omega'$, on en conclura

$$\delta\theta=\frac{\delta\omega'}{P'\sqrt{gc}},$$

pour la valeur de $\delta\theta$ correspondante à celle de $\delta\omega'$. En comparant ces valeurs à l'expression de V, on aura aussi

$$\delta\theta = -\frac{VP'\sqrt{c}\cos 6}{\omega'\sqrt{g}\,\text{tang}\,\gamma}.$$

Ce sera l'accroissement positif ou négatif du temps que le mobile emploiera à aller du point O au point E.

18. L'application de la méthode des *quadratures* aux intégrales doubles que ces diverses formules contiennent, exigerait des calculs très pénibles; mais on y suppléera par les considérations suivantes qui nous conduiront à des valeurs numériques assez approchées pour qu'on puisse juger de l'influence du mouvement de la Terre sur celui du projectile.

La plus petite et la plus grande valeur de P répondent à $p = \omega$ et à $p = \omega'$, et sont $\sqrt{\frac{g(1+\omega^2)}{a^2c}}$ et P'; quelle que soit la variable p, on aura donc

$$\int_p^\omega \frac{dp}{P} > \sqrt{\frac{g(1+\omega^2)}{a^2c}} \int_p^\omega \frac{dp}{P^2}, \quad \int_p^\omega \frac{dp}{P} < P' \int_p^\omega \frac{dp}{P^2};$$

on a d'ailleurs

$$\frac{dp}{P^2}\int_p^\omega \frac{dp}{P^2} = -\frac{1}{2}\,d.\left(\int_p^\omega \frac{dp}{P^2}\right)^2,$$

et par conséquent

$$\int_{-\omega'}^{-\omega}\left(\frac{dp}{P^2}\int_p^\omega \frac{dp}{P^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\int_{-\omega'}^{\omega} \frac{dp}{P^2}\right)^2 = \frac{1}{2}c^2\varpi^2;$$

d'où il résultera, abstraction faite du signe,

$$V > \frac{n\varpi^2\sin\gamma}{a\cos\alpha}, \qquad V < \frac{nP'\varpi^2\sqrt{c}\sin\gamma}{\sqrt{g}}.$$

En ayant égard à l'expression de θ, on trouvera pareillement

$$V > \frac{n\theta^2 \sqrt{g}\sin\gamma}{P'\sqrt{c}}, \quad V < n\theta^2 a \cos\alpha \sin\gamma.$$

Pour des valeurs données de a et α, les *tables du tir* feront connaître les valeurs de θ et ϖ qui entrent dans ces limites de V, ainsi que l'angle *de chute* α' et sa tangente ω', d'où l'on déduira la valeur de P', au moyen de l'équation

$$P'^2 = \frac{g(1+\omega^2)}{a^2 c} + \omega\sqrt{1+\omega^2} + \log(\omega + \sqrt{1+\omega^2})$$
$$+ \omega'\sqrt{1+\omega'^2} + \log(\omega' + \sqrt{1+\omega'^2}).$$

Je prendrai pour exemple le tir de la *bombe*, tel qu'il a lieu dans les exercices des *Polygones*. Le poids et le diamètre du projectile étant 51 kilogrammes et 27 centimètres, on trouve à peu près 2500 mètres pour la valeur de $\frac{1}{c}$ calculée par la formule du n° 10, et rapportée à l'état ordinaire de l'air. Sous l'angle de tir de 45°, la vitesse correspondante à une portée d'environ 1200 mètres, est évaluée par Lombard à un peu moins de 120 mètres, de sorte qu'en prenant toujours le mètre et la seconde pour unités de longueur et de temps, nous ferons

$$\omega = 1, \quad a = 119{,}54 \qquad c = 0{,}0004.$$

En employant aussi l'angle de chute, la portée et le temps du trajet, calculés par le même auteur (*), nous aurons, en même temps,

$$\alpha' = 50°8', \ \varpi = 1182, \ \theta = 16{,}25.$$

Au moyen de ces données jointes à celles-ci :

$$g = 9{,}8075, \ \gamma = 48°50'14'', \ n = \frac{2\pi}{86164}.$$

(*) *Traité du Mouvement des Projectiles*, p. 231.

on trouve d'abord

$$P' = 2{,}9343;$$

et l'on obtient ensuite

$$V > 0{,}9094, \quad V < 1{,}4374,$$

pour les limites de V qui dépendent de ϖ; puis

$$V > 0{,}7736, \quad V < 1{,}2253,$$

pour celles qui se déduisent de θ.

On conclut de l'un ou l'autre de ces deux couples de limites, que quand on tire vers l'*est* ou vers l'*ouest*, sous l'angle de 45 degrés, et à une distance du but d'environ 1200 mètres, la déviation à droite, due au mouvement de la terre, doit être à peu près égale à un mètre; en sorte que pour atteindre le but, il faudrait viser à gauche dans un plan qui ferait avec celui du vertical tangent au parallèle, un angle d'à peu près trois minutes, dont l'arc répond à un 1200e du rayon.

Si l'on fait $V = -1$, dans l'expression de $\delta\theta$, on en déduira

$$\delta\theta = (0{,}01368) \cos \epsilon;$$

c'est-à-dire que le mouvement de la terre n'influe pas sensiblement sur la longueur du temps θ.

(19). Les élémens de l'intégrale double que renferme l'expression de V' n'ayant pas le même signe dans toute l'étendue des intégrations, on ne peut pas en déterminer des limites, comme nous venons de le faire pour l'intégrale contenue dans V. Mais dans l'exemple que nous avons choisi, on a

$$k = 5{,}7271;$$

et pour cette valeur de k, celle de V' peut être réduite en série convergente, ordonnée suivant les puissances descendantes de k, dont il suffira, dans la question qui nous occupe, de conserver les deux premiers termes.

En faisant, pour abréger,

$$p\sqrt{1+p^2}+\log\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)=q,\quad P^2=k-q,$$

on aura, de cette manière,

$$\int_p^\omega \frac{pdp}{P}=\frac{1}{\sqrt{k}}\int_p^\omega pdp+\frac{1}{2k\sqrt{k}}\int_p^\omega qpdp;$$

mais on a identiquement

$$dq=2\sqrt{1+p^2}\,dp;$$

en faisant aussi pour abréger,

$$\omega\sqrt{1+\omega^2}+\log\left(\omega+\sqrt{1+\omega^2}\right)=h,$$

et intégrant par partie, on aura

$$\int_p^\omega qpdp=\tfrac{1}{2}h\omega^2-\tfrac{1}{2}qp^2-\int_p^\omega p^2\sqrt{1+p^2}\,dp;$$

donc, à cause de

$$\int_p^\omega pdp=\tfrac{1}{2}\left(\omega^2-p^2\right),$$

$$\int^\omega p^2\sqrt{1+p^2}\,dp=\tfrac{1}{4}\omega\left(1+\omega^2\right)^{\frac{3}{2}}-\tfrac{1}{4}p\left(1+p^2\right)^{\frac{3}{2}}-\tfrac{1}{8}h+\tfrac{1}{8}q,$$

il en résultera

$$\int_p^\omega \frac{pdp}{P}=\frac{1}{2\sqrt{k}}\left(\omega^2-p^2\right)+\frac{h\omega^2-qp^2}{4k\sqrt{k}}-\frac{\omega\left(1+\omega^2\right)^{\frac{3}{2}}-p\left(1+p^2\right)^{\frac{3}{2}}}{8k\sqrt{k}}+\frac{h-q}{16k\sqrt{k}}.$$

Nous aurons ensuite

$$\int_{-\omega'}^{\omega}\left(\frac{dp}{P^2}\int_p^{\omega}\frac{pdp}{P}\right)=\frac{1}{2k\sqrt{k}}\int_{-\omega'}^{\omega}(\omega^2-p^2)\,dp+\frac{1}{2k^2\sqrt{k}}\int_{-\omega'}^{\omega}(\omega^2-p^2)\,q\,dp$$

$$-\frac{1}{4k^2\sqrt{k}}\int_{-\omega'}^{\omega}\left[qp^2-\tfrac{1}{2}p(1+p^2)^{\frac{3}{2}}+\tfrac{1}{4}q\right]dp+\frac{\left[h\omega^2-\frac{1}{2}\omega(1+\omega^2)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{4}h\right](\omega+\omega')}{4k^2\sqrt{k}}.$$

La valeur de ω', déduite de l'équation (n), ne différera de ω que d'une quantité de l'ordre de petitesse de $\frac{1}{k}$; au degré d'approximation où nous nous arrêtons, on pourra donc faire $\omega'=\omega$ dans les termes de cette équation qui ont $k^2\sqrt{k}$ pour diviseur; les deux dernières intégrales que son second membre renferme, se réduiront alors à zéro, comme étant composées d'éléments qui sont deux à deux égaux et de signes contraires; et quant à la première, on aura

$$\int_{-\omega'}^{\omega}(\omega^2-p^2)\,dp=\int_{-\omega}^{\omega}(\omega^2-p^2)\,dp+\int_{-\omega'}^{-\omega}(\omega^2-p^2)\,dp,$$

ou simplement

$$\int_{-\omega'}^{\omega}(\omega^2-p^2)\,dp=\frac{4}{3}\,\omega^3,$$

en observant que l'intégrale $\int_{-\omega'}^{-\omega}(\omega^2-p^2)\,dp$ se réduit aussi à zéro, lorsque l'on néglige le carré de $\omega'-\omega$. On aura donc

$$\int_{-\omega'}^{\omega}\left(\frac{dp}{P^2}\int_p^{\omega}\frac{pdp}{P}\right)=\frac{2\omega^3}{3k\sqrt{k}}+\frac{\left[h\omega^2-\frac{1}{2}\omega(1+\omega^2)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{4}h\right]}{2k^2\sqrt{k}},$$

pour la valeur approchée de l'intégrale double.

Dans le cas de $\alpha=45^\circ$ et $\omega=1$, on aura

$$h=\sqrt{2}+\log(1+\sqrt{2})=2,2956,$$

parce qu'il s'agit d'un logarithme népérien que l'on doit multiplier par 2,3026 pour le convertir en logarithme ordinaire. En faisant usage, en outre, de la valeur de k citée plus haut, on trouvera

$$\int_{-\varpi'}^{\varpi}\left(\frac{dp}{P}\int_{p}^{\varpi}\frac{pdp}{P}\right)=0,05791.$$

Au moyen de cette valeur et de celles de n, γ, c, g, du numéro précédent, on trouvera

$$V'=0,2219;$$

ce qui montre que la déviation Δ ne varie pas beaucoup, lorsque le tir a lieu successivement dans différents plans verticaux. On aura, en même temps,

$$\delta\varpi=-(0,2219)\cos\mathcal{C};$$

en sorte que l'influence du mouvement de la terre sur la longueur de la portée, ne sera que d'à peu près un double décimètre dans son maximum.

(20). En général, lorsqu'il s'agit d'un projectile dont le poids et le diamètre sont considérables, et que l'angle du tir n'est pas très petit, ni la vitesse de projection très grande, la constante k est très grande, et le mouvement diffère peu de celui qui aurait lieu dans le vide; c'est pourquoi, il ne sera pas inutile de considérer le cas où la résistance de l'air serait tout-à-fait nulle.

Faisons donc $c=0$, dans les équations (h); elles se changeront en des équations linéaires et à coefficients constants que l'on pourrait intégrer sous forme finie, par la méthode ordinaire; mais en continuant de négliger, comme dans le n° 11, le carré de n, les valeurs approchées de u, v, z, qui y satisferont, et qui rempliront les conditions initiales du mouvement, seront

$$u = ta\cos\alpha - nt^2\left(a\sin\alpha-\tfrac{1}{3}gt\right)\cos\mathcal{C}\cos\gamma,$$

$$v = -nat^2\cos\alpha\sin\gamma+nt^2\left(a\sin\alpha-\tfrac{1}{3}gt\right)\sin\mathcal{C}\cos\gamma,$$

$$z = ta\sin\alpha-\tfrac{1}{2}gt^2+nt^2 a\cos\alpha\cos\mathcal{C}\cos\gamma.$$

On aura, en même temps,

$$\frac{ds^2}{dt^2} = a^2 - 2gta \sin \alpha + g^2 t^2,$$

pour le carré de la vitesse à un instant quelconque, qui ne dépendra pas de n, au degré d'approximation où nous nous arrêtons.

En conservant toutes les notations précédentes, on aura d'abord

$$\theta = \frac{2a \sin \alpha}{g}, \quad \varpi = \frac{a^2 \sin 2\alpha}{g},$$

abstraction faite de n, et ensuite, en y ayant égard,

$$\delta\theta = \frac{2na^2}{g^2} \sin 2\alpha \cos \beta \cos \gamma,$$

$$\delta\varpi = \frac{4na^3}{g^2} \sin \alpha \cos^2 \alpha \cos \beta \cos \gamma - \frac{4na^3}{3g^2} \sin^3 \alpha \cos \beta \cos \gamma;$$

et si l'on observe que la déviation désignée par Δ, n'est autre chose que la valeur de v qui répond à $z=0$, on aura aussi

$$\Delta = -\frac{4na^3}{g^2} \sin^2 \alpha \cos \alpha \sin \gamma + \frac{8na^3}{3g^2} \sin^3 \alpha \sin \beta \cos \gamma.$$

Dans l'exemple du n° 18, où l'angle du tir était de 45°, et la vitesse d'à peu près 120 mètres, on trouvera

$$\theta = 17,237, \quad \varpi = 1457,$$

en prenant la seconde et le mètre pour unités; et si l'on compare ces valeurs à celles que Lombard a calculées, on voit que la résistance de l'air avait diminué le temps du trajet, d'un peu plus d'une seconde, et la portée, d'à peu près le cinquième de sa grandeur dans le vide.

On aurait, en outre,

$$\delta\theta = (0,01426) \cos \beta,$$
$$\delta\varpi = (0,8036) \cos \beta,$$
$$\Delta = -1,3788 + (0,8036) \sin \beta;$$

en sorte que dans le vide comme dans l'air, ce serait par la déviation horizontale du projectile, que l'influence du mouvement de la terre se manifesterait principalement.

Pour $c = o$, on a $P' = \infty$; ce qui rend les deux limites de V qui dépendent de P', égales à zéro et l'infini, et par conséquent illusoires. Celles qui sont indépendantes de c, conviennent également au cas du mouvement dans l'air et à celui du mouvement dans le vide. En y substituant les valeurs de ϖ et de θ qui conviennent à ce dernier cas, ces deux limites deviennent égales entre elles, et au premier terme de la valeur précédente de Δ, abstraction faite du signe.