CHAPITRE V.

DE LA CHUTE DES CORPS QUI TOMBENT D'UNE GRANDE HAUTEUR.

15. Un corps qui, partant de l'état de repos, tombe d'une grande hauteur, s'éloigne sensiblement de la verticale, en vertu du mouvement de rotation de la Terre; cet écart, bien observé, est donc propre à manifester ce mouvement. Quoique la rotation de la Terre soit maintenant établie avec toute la certitude que les sciences physiques comportent, cependant une preuve directe de ce phénomène doit intéresser les géomètres et les astronomes. Afin que l'on puisse comparer sur ce point la théorie aux observations, je vais donner ici l'expression de la déviation du corps à l'orient de la verticale, quelles que soient la figure de la Terre et la résistance de l'air; je ferai voir, de plus, que sa déviation est nulle vers l'équateur.

Soient x, y, z les trois coordonnées rectangles du corps, l'origine de ces coordonnées étant au centre de la Terre, supposée immobile, et l'axe des x étant l'axe de rotation de cette planète. Soient r le rayon mené de ce centre au point d'où le corps tombe, θ l'angle que r forme avec l'axe de rotation, et ϖ l'angle que le plan passant par r et par l'axe de la Terre forme avec le plan passant par le même axe et par l'un des axes principaux de la Terre, situés dans le plan de son équateur. En nommant X, Y, Z les coordonnées du point d'où le corps tombe, on aura

$$X = r\cos\theta,$$
$$Y = r\sin\theta\cos(nt + \varpi),$$
$$Z = r\sin\theta\sin(nt + \varpi),$$

$nt + \varpi$ étant l'angle que le plan passant par r et par l'axe de la Terre forme avec le plan des x et des y, en sorte que nt est le mouvement angulaire de rotation de la Terre, et t exprime le temps.

Supposons ensuite que, relativement au corps dans sa chute, r se change en $r - \alpha s$, θ dans $\theta + \alpha u$, et ϖ dans $\varpi + \alpha v$; on aura

$$\begin{aligned}
x &= (r - \alpha s)\cos(\theta + \alpha u),\\
y &= (r - \alpha s)\sin(\theta + \alpha u)\cos(nt + \varpi + \alpha v),\\
z &= (r - \alpha s)\sin(\theta + \alpha u)\sin(nt + \varpi + \alpha v).
\end{aligned}$$

Nommons V la somme de toutes les molécules du sphéroïde terrestre, divisées par leurs distances au corps attiré. Les forces dont ce corps est animé par l'attraction de ces molécules sont, parallèlement aux axes des x, des y et des z, $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$, comme il résulte du n° 11 du Livre II. Pour avoir égard à la résistance de l'air, nous pouvons représenter par $\varphi\left(\alpha s, \alpha\frac{ds}{dt}\right)$ l'expression de cette résistance, lorsque le corps, en tombant, part de l'état du repos; car la vitesse du corps, relative à l'air considéré comme immobile, étant considérablement plus grande dans le sens de r que dans le sens perpendiculaire à r, ainsi qu'on le verra bientôt, l'expression de cette vitesse relative est à très-peu près $\alpha\frac{ds}{dt}$. Si l'on fait, pour plus de simplicité, $r = 1$, la vitesse relative du corps dans le sens de θ est $\alpha\frac{du}{dt}$, et dans le sens de ϖ, elle est égale à $\alpha\frac{dv}{dt}\sin\theta$; la résistance de l'air sera donc

dans le sens de r ...... $\dfrac{\varphi\left(\alpha s, \alpha\frac{ds}{dt}\right)}{\alpha\frac{ds}{dt}}\alpha\dfrac{ds}{dt}$,

dans le sens de θ ...... $-\dfrac{\varphi\left(\alpha s, \alpha\frac{ds}{dt}\right)}{\alpha\frac{ds}{dt}}\alpha\dfrac{du}{dt}$,

dans le sens de ϖ ...... $-\dfrac{\varphi\left(\alpha s, \alpha\frac{ds}{dt}\right)}{\alpha\frac{ds}{dt}}\alpha\dfrac{dv}{dt}\sin\theta$.

Nommons S le facteur $\dfrac{\varphi\left(\alpha s,\ \alpha \dfrac{ds}{dt}\right)}{\alpha \dfrac{ds}{dt}}$; on aura, par le principe des vitesses virtuelles,

$$\begin{aligned}
0 = {} & \delta x \frac{d^2x}{dt^2} + \delta y \frac{d^2y}{dt^2} + \delta z \frac{d^2z}{dt^2} \\
& - \delta x \frac{\partial V}{\partial x} - \delta y \frac{\partial V}{\partial y} - \delta z \frac{\partial V}{\partial z} \\
& - S\delta r . \alpha \frac{ds}{dt} + S\delta\theta . \alpha \frac{du}{dt} + S\delta\varpi \sin^2\theta . \alpha \frac{dv}{dt},
\end{aligned}$$

la caractéristique différentielle δ se rapportant aux coordonnées r, θ et ϖ, dont x, y, z sont fonctions. En substituant pour x, y, z leurs valeurs précédentes, on a, en négligeant les termes de l'ordre α^2,

$$(1)\left\{\begin{aligned}
0 = {} & \delta r\left(-\alpha \frac{d^2s}{dt^2} - 2\alpha n r \frac{dv}{dt}\sin^2\theta - \alpha S \frac{ds}{dt}\right) \\
& + r^2\delta\theta\left(\alpha \frac{d^2u}{dt^2} - 2\alpha n \frac{dv}{dt}\sin\theta\cos\theta + \alpha S \frac{du}{dt}\right) \\
& + r^2\delta\varpi\left(\alpha \frac{d^2v}{dt^2}\sin^2\theta + 2\alpha n \frac{du}{dt}\sin\theta\cos\theta - \frac{2\alpha n \dfrac{ds}{dt}\sin^2\theta}{r} + \alpha S \frac{dv}{dt}\sin^2\theta\right) \\
& - \delta V - \frac{n^2}{2}\delta[(r - \alpha s)^2 \sin^2(\theta + \alpha u)].
\end{aligned}\right.$$

L'équilibre de la couche d'air dans laquelle le corps se trouve donne, par le n° 35 du Livre I,

$$(2) \qquad 0 = \delta V + \frac{n^2}{2}\delta[(r - \alpha s)^2 \sin^2(\theta + \alpha u)],$$

pourvu que la valeur de δr soit assujettie à la surface de la couche de niveau, où la pression est constante, par le n° 22 du Livre III. Soit, à cette surface,

$$r = a + y,$$

y étant fonction de θ, de ϖ et de a, a étant constant pour la même couche. Si l'on désigne par Q la fonction

$$V+\frac{n^2}{2}\left[(r-\alpha s)^2\sin^2(\theta+\alpha u)\right],$$

l'équation (2) devient

$$0=\frac{\partial Q}{\partial r}\left(\frac{\partial r}{\partial\theta}\,\delta\theta+\frac{\partial r}{\partial\varpi}\,\delta\varpi\right)+\frac{\partial Q}{\partial\theta}\,\delta\theta+\frac{\partial Q}{\partial\varpi}\,\delta\varpi;$$

en ajoutant cette équation à l'équation (1), on aura

$$\begin{aligned}
0={}&\delta r\left(-\alpha\frac{d^2s}{dt^2}-2\alpha nr\frac{dv}{dt}\sin^2\theta-\alpha S\frac{ds}{dt}\right)\\
&+r^2\delta\theta\left(\alpha\frac{d^2u}{dt^2}-2\alpha n\frac{dv}{dt}\sin\theta\cos\theta+\alpha S\frac{du}{dt}\right)\\
&+r^2\delta\varpi\sin\theta\left(\alpha\frac{d^2v}{dt^2}\sin\theta+2\alpha n\frac{du}{dt}\cos\theta-2\alpha n\frac{ds}{dt}\frac{\sin\theta}{r}+\alpha S\frac{dv}{dt}\sin\theta\right)\\
&-\frac{\partial Q}{\partial r}\left(\delta r-\frac{\partial r}{\partial\theta}\,\delta\theta-\frac{\partial r}{\partial\varpi}\,\delta\varpi\right).
\end{aligned}$$

Si l'on égale à zéro les coefficients des variations δr, $\delta\theta$ et $\delta\varpi$, et si l'on observe que $-\frac{\partial Q}{\partial r}$ exprime, par le n° 36 du Livre III, la pesanteur, que nous désignerons par g, on aura, en prenant pour unité le rayon r, ce que l'on peut faire ici sans erreur sensible, les trois équations suivantes :

$$(A)\quad\left\{\begin{aligned}
0&=\alpha\frac{d^2s}{dt^2}+2\alpha n\frac{dv}{dt}\sin^2\theta+\alpha S\frac{ds}{dt}-g,\\
0&=\alpha\frac{d^2u}{dt^2}-2\alpha n\frac{dv}{dt}\sin\theta\cos\theta+\alpha S\frac{du}{dt}-g\frac{\partial r}{\partial\theta},\\
0&=\alpha\frac{d^2v}{dt^2}\sin\theta+2\alpha n\frac{du}{dt}\cos\theta-2\alpha n\frac{ds}{dt}\sin\theta+\alpha S\frac{dv}{dt}\sin\theta-\frac{g}{\sin\theta}\frac{\partial r}{\partial\varpi}.
\end{aligned}\right.$$

L'inspection de ces équations fait voir que αs est, relativement à αu et αv, du même ordre que l'unité relativement à $\frac{\partial r}{\partial\theta}$ ou $\frac{\partial r}{\partial\varpi}$. De plus, $\alpha\frac{dv}{dt}$ est du même ordre que $gt\frac{\partial r}{\partial\varpi}$, et par conséquent $2\alpha n\frac{dv}{dt}\sin^2\theta$ est de l'ordre $gnt\frac{\partial r}{\partial\varpi}$. Si l'on prend pour unité de temps la seconde décimale ou la cent-millième partie du jour moyen; n exprime le petit angle décrit dans une seconde par la rotation de la Terre; nt est ce même angle multiplié par le nombre de secondes que dure la chute du corps. Ce nombre est toujours assez petit pour que le produit nt soit une très-petite fraction, que l'on peut négliger relativement à l'unité; on peut donc supprimer le terme $2\alpha n\frac{dv}{dt}\sin^2\theta$ de la première des équations précédentes, et le terme $-2\alpha n\frac{dv}{dt}\sin\theta\cos\theta$ de la seconde de ces équations. On peut, par une raison semblable, supprimer le terme $2\alpha n\frac{du}{dt}\cos\theta$ de la troisième de ces équations, qui se réduisent ainsi aux suivantes :

$$o = \alpha\frac{d^2s}{dt^2} + \alpha S\frac{ds}{dt} - g,$$

$$o = \alpha\frac{d^2u}{dt^2} + \alpha S\frac{du}{dt} - g\frac{\partial r}{\partial\theta},$$

$$o = \alpha\frac{d^2v}{dt^2}\sin\theta - 2\alpha n\frac{ds}{dt}\sin\theta + \alpha S\frac{dv}{dt}\sin\theta - \frac{g}{\sin\theta}\,\frac{\partial r}{\partial\varpi}.$$

S étant une fonction de αs et de $\alpha\frac{ds}{dt}$, la première de ces équations donne αs en fonction du temps t. Si l'on fait

$$\alpha u = \alpha s\,\frac{\partial r}{\partial\theta},$$

on satisfera à la seconde de ces équations, parce que g et $\frac{\partial r}{\partial\theta}$ peuvent être supposés constants pendant la durée du mouvement, vu la petitesse de la hauteur d'où le corps tombe, relativement au rayon terrestre. Cette manière de satisfaire à la seconde équation est la seule qui convienne à la question présente, dans laquelle u et $\frac{du}{dt}$ sont nuls, ainsi que s et $\frac{ds}{dt}$, à l'origine du mouvement. Maintenant, si l'on imagine un fil à plomb de la longueur αs, suspendu au point d'où le corps tombe, il s'écartera, au midi du rayon r, de la quantité $\alpha s\frac{\partial r}{\partial\theta}$, et par conséquent de la quantité αu; le corps, en tombant, est donc toujours sur les parallèles des points de la verticale qui sont à la même hauteur que lui; il n'éprouve ainsi aucune déviation sensible vers le midi de cette ligne.

Pour intégrer la troisième équation, nous ferons

$$\alpha v \sin\theta = \frac{\alpha s}{\sin\theta}\frac{\partial y}{\partial\varpi} + \alpha v',$$

et nous aurons

$$o = \alpha\frac{d^2v'}{dt^2} + \alpha S\frac{dv'}{dt} - 2\alpha n\frac{ds}{dt}\sin\theta.$$

Le corps s'écarte à l'est du rayon r de la quantité $\alpha v\sin\theta$, ou $\frac{\alpha s}{\sin\theta}\frac{\partial y}{\partial\varpi} + \alpha v'$; mais le fil à plomb s'écarte à l'est de ce rayon de la quantité $\frac{\alpha s}{\sin\theta}\frac{\partial y}{\partial\varpi}$; $\alpha v'$ est donc l'écart du corps à l'est de la verticale.

Supposons maintenant la résistance de l'air proportionnelle au carré de la vitesse, en sorte que $S = m\alpha\frac{ds}{dt}$, m étant un coefficient qui dépend de la figure du corps et de la densité de l'air, densité variable à raison de la hauteur, mais qui peut être ici supposée constante sans erreur sensible; on aura

$$o = \alpha\frac{d^2s}{dt^2} + \alpha^2 m\frac{ds^2}{dt^2} - g.$$

Pour intégrer cette équation, nous ferons

$$\alpha s = \frac{1}{m}\log s',$$

et nous aurons

$$o = \frac{d^2s'}{dt^2} - mgs',$$

ce qui donne, en intégrant,

$$s' = Ac^{t\sqrt{mg}} + Bc^{-t\sqrt{mg}},$$

c étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité, et A et B étant deux arbitraires. Pour les déterminer, nous observerons que αs

doit être nul lorsque $t = 0$, ce qui donne alors $s' = 1$, et par conséquent

$$A + B = 1.$$

De plus, $\alpha \frac{ds}{dt}$ doit être nul avec t, et par conséquent aussi $\alpha \frac{ds'}{dt}$; ce qui donne

$$A - B = 0;$$

on a donc $A = B = \frac{1}{2}$, d'où l'on tire

$$\alpha s = \frac{1}{m} \log\left(\tfrac{1}{2} c^{t\sqrt{mg}} + \tfrac{1}{2} c^{-t\sqrt{mg}}\right),$$

et, en réduisant en série,

$$\alpha s = \frac{gt^2}{2} - \frac{mg^2 t^4}{12} + \frac{m^2 g^3 t^6}{45} - \ldots.$$

Pour déterminer $\alpha v'$, nous observerons que l'on a

$$\alpha \frac{ds}{dt} = \frac{1}{m} \frac{ds'}{s' dt},$$

et qu'ainsi l'équation différentielle en $\alpha v'$ devient

$$0 = \alpha s' \frac{d^2 v'}{dt^2} + \alpha \frac{ds'}{dt} \frac{dv'}{dt} - \frac{2n}{m} \frac{ds'}{dt} \sin \theta,$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$\alpha s' \frac{dv'}{dt} = \frac{2n}{m} s' \sin \theta + C,$$

C étant une constante. Pour la déterminer, nous observerons que, t étant nul, $\frac{dv'}{dt} = 0$, et qu'alors $s' = 1$, ce qui donne

$$C = -\frac{2n}{m} \sin \theta;$$

partant,

$$\alpha \frac{dv'}{dt} = \frac{2n}{m} \sin \theta \left(1 - \frac{1}{s'}\right) = \frac{2n}{m} \sin \theta \left(1 - \frac{2}{c^{t\sqrt{mg}} + c^{-t\sqrt{mg}}}\right).$$

En intégrant de manière que v' soit nul avec t, on aura

$$\alpha v' = \frac{2n}{m} t \sin\theta - \frac{4n\sin\theta}{m\sqrt{mg}} \operatorname{arc\,tang} \frac{c^{\frac{t}{2}\sqrt{mg}} - c^{-\frac{t}{2}\sqrt{mg}}}{c^{\frac{t}{2}\sqrt{mg}} + c^{-\frac{t}{2}\sqrt{mg}}},$$

et, en réduisant en série,

$$\alpha v' = \frac{ngt^3 \sin\theta}{3}\left(1 - \frac{mgt^2}{4} + \frac{61}{840} m^2 g^2 t^4 - \ldots\right).$$

On doit observer, dans ces expressions de αs et de $\alpha v'$, que, t exprimant un nombre d'unités de temps ou de secondes décimales, g est le double de l'espace que la pesanteur fait décrire dans la première unité de temps; nt est l'angle de rotation de la Terre pendant le nombre t d'unités, et mg est un nombre dépendant de la résistance que l'air oppose au mouvement du corps.

Pour avoir le temps t de la chute du corps et l'écart vers l'est, en fonction de la hauteur d'où le corps est tombé, nommons h cette hauteur. On aura, par ce qui précède,

$$2c^{mh} = c^{t\sqrt{mg}} + c^{-t\sqrt{mg}},$$

d'où l'on tire

$$t = \frac{1}{\sqrt{mg}} \log \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{c^{mh}+1} + \sqrt{c^{mh}-1}\right)^2,$$

et ensuite

$$\alpha v' = \frac{2n\sin\theta}{m\sqrt{mg}}\left[\log\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{c^{mh}+1} + \sqrt{c^{mh}-1}\right)^2 - 2\operatorname{arc\,tang}\frac{\sqrt{c^{mh}-1}}{\sqrt{c^{mh}+1}}\right].$$

La hauteur h étant donnée, l'observation du temps t donnera la valeur de m, et l'on en conclura $\alpha v'$ ou la déviation du corps à l'est de la verticale. On pourra encore déterminer m par la figure et la densité du corps, et par les expériences déjà faites sur la résistance de l'air.

Dans le vide, ou, ce qui revient au même, dans le cas de m infiniment petit, on a

$$\alpha v' = \frac{2nh}{3}\sqrt{\frac{2h}{g}}\sin\theta.$$

On a déjà fait, en Italie et en Allemagne, plusieurs expériences sur la chute des corps, qui s'accordent avec les résultats précédents. Mais ces expériences, qui exigent des attentions très-délicates, ont besoin d'être répétées avec plus d'exactitude encore.

16. Considérons présentement le cas où le corps a un mouvement quelconque dans l'espace. Reprenons pour cela les équations (A) du numéro précédent, et supposons

$$\alpha u = \alpha s \frac{\partial r}{\partial \theta} + \alpha u',$$

$$\alpha v \sin\theta = \frac{\alpha s \dfrac{\partial r}{\partial \varpi}}{\sin\theta} + \alpha v';$$

$\alpha u'$ et $\alpha v'$ seront les déviations du corps de la verticale qui passe par le point de départ, l'une dans le sens du méridien, l'autre dans le sens du parallèle. Les équations (A) donneront ainsi les suivantes, en faisant abstraction de la résistance de l'air,

$$0 = \alpha \frac{d^2 s}{dt^2} + 2\alpha n \frac{dv'}{dt} \sin\theta + 2\alpha n \frac{ds}{dt} \frac{\partial r}{\partial \varpi} - g,$$

$$0 = \alpha \frac{d^2 s}{dt^2} \frac{\partial r}{\partial \theta} + \alpha \frac{d^2 u'}{dt^2} - 2\alpha n \frac{ds}{dt} \frac{\partial r}{\partial \varpi} \frac{\cos\theta}{\sin\theta} - 2\alpha n \frac{dv'}{dt} \cos\theta - g \frac{\partial r}{\partial \theta},$$

$$\begin{aligned} 0 = {} & \alpha \frac{d^2 s}{dt^2} \frac{\dfrac{\partial r}{\partial \varpi}}{\sin\theta} + \alpha \frac{d^2 v'}{dt^2} + 2\alpha n \frac{ds}{dt} \frac{\partial r}{\partial \theta} \cos\theta + 2\alpha n \frac{du'}{dt} \cos\theta \\ & - 2\alpha n \frac{ds}{dt} \sin\theta - \frac{g \dfrac{\partial r}{\partial \varpi}}{\sin\theta}. \end{aligned}$$

En retranchant des deux dernières équations la première, multipliée successivement par $\frac{\partial r}{\partial \theta}$ et $\frac{\frac{\partial r}{\partial \varpi}}{\sin\theta}$, et rejetant les produits de ces deux quantités par $\alpha n\frac{ds}{dt}$, $\alpha n\frac{dv'}{dt}$ et $\alpha n\frac{du'}{dt}$, on formera les trois équations

$$0 = \alpha\frac{d^2u'}{dt^2} - 2\alpha n\frac{dv'}{dt}\cos\theta,$$

$$0 = \alpha\frac{d^2v'}{dt^2} + 2\alpha n\frac{du'}{dt}\cos\theta - 2\alpha n\frac{ds}{dt}\sin\theta,$$

$$0 = \alpha\frac{d^2s}{dt^2} + 2\alpha n\frac{dv'}{dt}\sin\theta - g.$$

Ces équations donnent, en les intégrant et fixant au point du départ l'origine des coordonnées αs, $\alpha u'$ et $\alpha v'$, et l'origine du temps t à l'instant du départ,

$$\alpha u' = \mathrm{B}t\sin\theta + \tfrac{1}{2}gt^2\sin\theta\cos\theta + \mathrm{C}\cos\theta[\cos(2nt+\varepsilon) - \cos\varepsilon],$$

$$\alpha v' = \frac{gt\sin\theta}{2n} - \mathrm{C}[\sin(2nt+\varepsilon) - \sin\varepsilon],$$

$$\alpha s = \mathrm{B}t\cos\theta + \tfrac{1}{2}gt^2\cos^2\theta - \mathrm{C}\sin\theta[\cos(2nt+\varepsilon) - \cos\varepsilon],$$

B, C, ε étant trois arbitraires, que déterminent les vitesses initiales du corps dans le sens des trois coordonnées.

Supposons, par exemple, que le corps soit lancé verticalement de bas en haut, avec une vitesse égale à K. Les valeurs positives de s étant prises ici de haut en bas, on aura, à l'origine du temps t, $\frac{ds}{dt} = -\mathrm{K}$. On aura de plus, à cette origine, $\frac{du'}{dt} = 0$, $\frac{dv'}{dt} = 0$; partant,

$$0 = \mathrm{B}\sin\theta - 2n\mathrm{C}\cos\theta\sin\varepsilon,$$

$$0 = \frac{g}{2n}\sin\theta - 2n\mathrm{C}\cos\varepsilon,$$

$$-\mathrm{K} = \mathrm{B}\cos\theta + 2n\mathrm{C}\sin\theta\sin\varepsilon,$$

d'où l'on tire

$$\mathrm{C}\sin\varepsilon = -\frac{\mathrm{K}\sin\theta}{2n},$$

$$\mathrm{C}\cos\varepsilon = \frac{g\sin\theta}{4n^2},$$

$$\mathrm{B} = -\mathrm{K}\cos\theta,$$

ce qui donne

$$\alpha s = -Kt + \tfrac{1}{2}gt^2 + \frac{g\sin^2\theta}{4n^2}(1 - 2n^2t^2 - \cos 2nt) + \frac{K\sin^2\theta}{2n}(2nt - \sin 2nt),$$

$$\alpha u' = -\sin\theta\cos\theta\left[\frac{K}{2n}(2nt - \sin 2nt) + \frac{g}{4n^2}(1 - 2n^2t^2 - \cos 2nt)\right],$$

$$\alpha v' = \frac{\sin\theta}{2n}\left[gt - \frac{g\sin 2nt}{2n} - K(1 - \cos 2nt)\right].$$

En réduisant ces expressions en séries, et négligeant les quantités de l'ordre n^2, on a

$$\alpha s = -Kt + \tfrac{1}{2}gt^2,$$

$$\alpha u' = 0,$$

$$\alpha v' = \frac{nt^2}{3}\sin\theta(gt - 3K).$$

Ces expressions nous montrent que la déviation du corps, dans le sens du méridien, est très-peu sensible; elle ne l'est que dans celui du parallèle. En supposant K nul, on a la même expression que ci-dessus pour cette déviation. Si, K n'étant pas nul, on cherche le point où le corps doit retomber, on fera $\alpha s = 0$, ce qui donne $gt = 2K$, et par conséquent

$$\alpha v' = -\frac{4nK^3\sin\theta}{3g^2}.$$

Pour réduire en nombres cette formule, on observera que n est l'angle décrit par la rotation de la Terre dans une seconde, et cet angle est égal à $\frac{40''}{0,99727}$, parce que la durée du jour sidéral est de 99727 secondes. Il faut le réduire en parties du rayon, ou le diviser par l'arc égal au rayon, c'est-à-dire par $636619'',8$. g est le double de l'espace que la pesanteur fait décrire aux graves dans la première seconde de leur chute, et ce double espace est, à la latitude de Paris, égal à $7^{\text{m}},32214$. Supposons, par exemple, la vitesse K égale à 500 mètres par seconde; on aura pour Paris, dont la latitude est de $54°,2636$, θ égal au complément de cette latitude, et, par conséquent, égal à $45°,7364$, ce qui donne

$$zv' = -\frac{4}{3}\cdot 500^{\mathrm{m}}\left(\frac{500^{\mathrm{m}}}{7^{\mathrm{m}},32214}\right)^2 \frac{40''}{0,99727\cdot 636619'',8}\sin 45^{\circ},7364,$$

d'où l'on tire

$$zv' = -128^{\mathrm{m}},9;$$

c'est la quantité dont le corps retombera à l'occident du point du départ; car la rotation de la Terre ayant lieu d'occident en orient, les zv' négatifs ont lieu dans le sens opposé.