rait d'autre mouvement que celui de rotation qui lui est commun avec la Terre.

35. Déterminons, maintenant, les oscillations d'une masse fluide recouvrant un sphéroïde doué d'un mouvement de rotation nt autour de l'axe des x, et supposons-la très-peu dérangée de l'état d'équilibre, par l'action de forces très-petites. Soit, à l'origine du mouvement, r la distance d'une molécule fluide au centre de gravité du sphéroïde qu'elle recouvre, et que nous supposerons immobile; soit θ l'angle que le rayon r forme avec l'axe des x, et ϖ l'angle que le plan qui passe par l'axe des x et par ce rayon forme avec le plan des x et des y. Supposons qu'après le temps t le rayon r se change dans $r+\alpha s$, que l'angle θ se change dans $\theta+\alpha u$, et que l'angle ϖ se change dans $nt+\varpi+\alpha v$, αs, αu et αv étant de très-petites quantités dont nous négligerons les carrés et les produits; on aura

$$
\begin{aligned}
x &= (r+\alpha s)\cos(\theta+\alpha u),\\
y &= (r+\alpha s)\sin(\theta+\alpha u)\cos(nt+\varpi+\alpha v),\\
z &= (r+\alpha s)\sin(\theta+\alpha u)\sin(nt+\varpi+\alpha v).
\end{aligned}
$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'équation (F) du n° 32, on aura, en négligeant le carré de α,

$$
(\mathrm{L})\quad \left\{
\begin{aligned}
&\alpha r^2\delta\theta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-2n\sin\theta\cos\theta\frac{\partial v}{\partial t}\right)\\
&\quad+\alpha r^2\delta\varpi\left(\sin^2\theta\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+2n\sin\theta\cos\theta\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{2n\sin^2\theta}{r}\frac{\partial s}{\partial t}\right)\\
&\quad+\alpha\delta r\left(\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}-2nr\sin^2\theta\frac{\partial v}{\partial t}\right)\\
&=\frac{n^2}{2}\delta[(r+\alpha s)\sin(\theta+\alpha u)]^2+\delta V-\frac{\delta p}{\rho}.
\end{aligned}
\right.
$$

A la surface extérieure du fluide, on a $\delta p = 0$; on a de plus, dans l'état d'équilibre,

$$
0=\frac{n^2}{2}\delta[(r+\alpha s)\sin(\theta+\alpha u)]^2+(\delta V),
$$

(δV) étant la valeur de δV qui convient à cet état. Supposons que le fluide dont il s'agit soit la mer; la variation (δV) sera le produit de la pesanteur multipliée par l'élément de sa direction. Nommons g la pesanteur, et αy l'élévation d'une molécule d'eau de sa surface, au-dessus de sa surface d'équilibre, surface que nous regarderons comme le véritable niveau de la mer. La variation (δV) croîtra par cette élévation, dans l'état de mouvement, de la quantité $-\alpha g\,\delta y$, parce que la pesanteur est à fort peu près dirigée dans le sens des αy et vers leur origine. En désignant ensuite par $\alpha\,\delta V'$ la partie de δV relative aux nouvelles forces qui, dans l'état de mouvement, sollicitent la molécule, et qui dépendent soit des changements qu'éprouvent par cet état les attractions du sphéroïde et du fluide, soit des attractions étrangères, on aura à la surface

$$\delta V = (\delta V) - \alpha g\,\delta y + \alpha\,\delta V'.$$

La variation $\frac{n^2}{2}\delta\left[(r+\alpha s)\sin(\theta+\alpha u)\right]^2$ croît de la quantité $\alpha n^2\,\delta y . r\sin^2\theta$, en vertu de la hauteur de la molécule d'eau au-dessus du niveau de la mer; mais cette quantité peut être négligée relativement au terme $-\alpha g\,\delta y$, parce que le rapport $\frac{n^2 r}{g}$ de la force centrifuge à l'équateur, à la pesanteur, est une très-petite fraction égale à $\frac{1}{289}$. Enfin le rayon r est à fort peu près constant à la surface de la mer, parce qu'elle diffère très-peu d'une surface sphérique; on peut donc y supposer δr nulle. L'équation (L) devient ainsi, à la surface de la mer,

$$\begin{aligned} & r^2\delta\theta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2n\sin\theta\cos\theta\,\frac{\partial v}{\partial t}\right) \\ & \quad + r^2\delta\varpi\left(\sin^2\theta\,\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2n\sin\theta\cos\theta\,\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{2n\sin^2\theta}{r}\,\frac{\partial s}{\partial t}\right) = -g\,\delta y + \delta V', \end{aligned}$$

les variations δy et $\delta V'$ étant relatives aux deux variables θ et ϖ.

Considérons, présentement, l'équation relative à la continuité du fluide. Pour cela, concevons, à l'origine du mouvement, un parallélépipède rectangle dont la hauteur soit dr, dont la largeur soit $r d\varpi \sin\theta$, et dont la longueur soit $r d\theta$. Nommons r', θ' et ϖ' ce que deviennent r,

θ et ϖ après le temps t. En suivant le raisonnement du n° 32, on trouvera qu'après ce temps le volume de la molécule fluide est égal à un parallélépipède rectangle dont la hauteur est $\frac{\partial r'}{\partial r}\,dr$, dont la largeur est

$$r'\sin\theta'\left(\frac{\partial\varpi'}{\partial\varpi}\,d\varpi + \frac{\partial\varpi'}{\partial r}\,dr\right),$$

en éliminant dr au moyen de l'équation

$$0 = \frac{\partial r'}{\partial\varpi}\,d\varpi + \frac{\partial r'}{\partial r}\,dr;$$

enfin, dont la longueur est

$$r'\left(\frac{\partial\theta'}{\partial r}\,dr + \frac{\partial\theta'}{\partial\theta}\,d\theta + \frac{\partial\theta'}{\partial\varpi}\,d\varpi\right),$$

en éliminant dr et $d\varpi$, au moyen des équations

$$0 = \frac{\partial r'}{\partial r}\,dr + \frac{\partial r'}{\partial\theta}\,d\theta + \frac{\partial r'}{\partial\varpi}\,d\varpi,$$

$$0 = \frac{\partial\varpi'}{\partial r}\,dr + \frac{\partial\varpi'}{\partial\theta}\,d\theta + \frac{\partial\varpi'}{\partial\varpi}\,d\varpi.$$

En supposant donc

$$\begin{aligned}\varepsilon' = {} & \frac{\partial r'}{\partial r}\frac{\partial\theta'}{\partial\theta}\frac{\partial\varpi'}{\partial\varpi} - \frac{\partial r'}{\partial r}\frac{\partial\theta'}{\partial\varpi}\frac{\partial\varpi'}{\partial\theta} + \frac{\partial r'}{\partial\theta}\frac{\partial\theta'}{\partial\varpi}\frac{\partial\varpi'}{\partial r}\\ & - \frac{\partial r'}{\partial\theta}\frac{\partial\theta'}{\partial r}\frac{\partial\varpi'}{\partial\varpi} + \frac{\partial r'}{\partial\varpi}\frac{\partial\theta'}{\partial r}\frac{\partial\varpi'}{\partial\theta} - \frac{\partial r'}{\partial\varpi}\frac{\partial\theta'}{\partial\theta}\frac{\partial\varpi'}{\partial r};\end{aligned}$$

le volume de la molécule après le temps t sera $\varepsilon' r'^2 \sin\theta'\,dr\,d\theta\,d\varpi$; ainsi, en nommant (ρ) la densité primitive de cette molécule, et ρ sa densité correspondante à t, on aura, en égalant l'expression primitive de sa masse à son expression après le temps t,

$$\rho\varepsilon' r'^2\sin\theta' = (\rho)\,r^2\sin\theta;$$

c'est l'équation de la continuité du fluide. Dans le cas présent,

$$r' = r + \alpha s,\quad \theta' = \theta + \alpha u,\quad \varpi' = nt + \varpi + \alpha v;$$

on aura ainsi, en négligeant les quantités de l'ordre α^2,

$$6' = 1 + \alpha\frac{\partial s}{\partial r} + \alpha\frac{\partial u}{\partial \theta} + \alpha\frac{\partial v}{\partial \varpi}.$$

Supposons qu'après le temps t la densité primitive (ρ) du fluide se change en $(\rho) + \alpha\rho'$; l'équation précédente, relative à la continuité du fluide, donnera

$$0 = r^2\left[\rho' + (\rho)\left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \varpi} + \frac{u\cos\theta}{\sin\theta}\right)\right] + (\rho)\frac{\partial . r^2 s}{\partial r}.$$

36. Appliquons ces résultats aux oscillations de la mer. Sa masse étant homogène, on a $\rho' = 0$, et par conséquent

$$0 = \frac{\partial . r^2 s}{\partial r} + r^2\left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \varpi} + \frac{u\cos\theta}{\sin\theta}\right).$$

Supposons, conformément à ce qui paraît avoir lieu dans la nature, la profondeur de la mer très-petite relativement au rayon r du sphéroïde terrestre; représentons-la par γ, γ étant une fonction très-petite de θ et de ϖ, qui dépend de la loi de cette profondeur. Si l'on intègre l'équation précédente, par rapport à r, depuis la surface du solide que la mer recouvre jusqu'à la surface de la mer, on voit que la valeur de s sera égale à une fonction de θ, ϖ et t, indépendante de r, plus à une très-petite fonction qui sera, par rapport à u et à v, du même ordre de petitesse que la fonction $\frac{\gamma}{r}$; or, à la surface du solide que la mer recouvre, lorsque les angles θ et ϖ se changent dans $\theta + \alpha u$ et $nt + \varpi + \alpha v$, il est aisé de voir que la distance d'une molécule d'eau, contiguë à cette surface, au centre de gravité de la Terre ne varie que d'une quantité très-petite par rapport à αu et αv, et du même ordre que les produits de ces quantités par l'excentricité du sphéroïde recouvert par la mer : la fonction indépendante de r, qui entre dans l'expression de s, est donc très-petite du même ordre; ainsi l'on peut négliger généralement s vis-à-vis de u et de v. L'équation du mouvement de la mer à sa surface, donnée dans le n° 35, devient par là

$$(\mathrm{M})\quad \begin{cases} r^2\,\delta\theta\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2n\sin\theta\cos\theta\,\dfrac{\partial v}{\partial t}\right) \\[2mm] + r^2\,\delta\varpi\left(\sin^2\theta\,\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2n\sin\theta\cos\theta\,\dfrac{\partial u}{\partial t}\right) = -g\,\delta y + \delta V'. \end{cases}$$

L'équation (L) du même numéro, relative à un point quelconque de l'intérieur de la masse du fluide, donne, dans l'état d'équilibre,

$$0 = \frac{n^2}{2}\,\delta\left[(r + \alpha s)\sin(\theta + \alpha u)\right]^2 + (\delta V) - \frac{(\delta p)}{\rho},$$

(δV) et (δp) étant les valeurs de δV et δp qui, dans l'état d'équilibre, conviennent aux quantités $r + \delta s$, $\theta + \alpha u$ et $\varpi + \alpha v$. Supposons que, dans l'état de mouvement, on ait

$$\delta V = (\delta V) + \alpha\,\delta V', \quad \delta p = (\delta p) + \alpha\,\delta p';$$

l'équation (L) donnera

$$\frac{\partial\left(V' - \dfrac{p'}{\rho}\right)}{\partial r} = \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - 2nr\sin^2\theta\,\frac{\partial v}{\partial t}.$$

L'équation (M) nous montre que $n\dfrac{\partial v}{\partial t}$ est du même ordre que y ou s, et par conséquent de l'ordre $\dfrac{\alpha u}{r}$; la valeur du premier membre de cette équation est donc du même ordre; ainsi, en multipliant cette valeur par dr, et en l'intégrant depuis la surface du sphéroïde que la mer recouvre jusqu'à la surface de la mer, on aura $V' - \dfrac{p'}{\rho}$ égal à une fonction très-petite, de l'ordre $\dfrac{\alpha s}{r}$, plus à une fonction de θ, ϖ et t, indépendante de r, et que nous désignerons par λ; en n'ayant donc égard, dans l'équation (L) du n° 35, qu'aux deux variables θ et ϖ, elle se changera dans l'équation (M), avec la seule différence que le second membre se changera dans $\delta\lambda$. Mais, λ étant indépendant de la profondeur à laquelle se trouve la molécule d'eau que nous considérons, si l'on suppose cette molécule très-voisine de la surface, l'équation (L) doit évidemment coïncider avec l'équation (M); on a donc $\delta\lambda = \delta V' - g\delta y$, et par conséquent

$$\delta\left(V' - \frac{p'}{\rho}\right) = \delta V' - g\delta y,$$

la valeur de $\delta V'$ dans le second membre de cette équation étant relative à la surface de la mer. Nous verrons, dans la théorie du flux et du reflux de la mer, que cette valeur est à très-peu près la même pour toutes les molécules situées sur le même rayon terrestre, depuis la surface du solide que la mer recouvre jusqu'à la surface de la mer; on a donc, relativement à toutes ces molécules,

$$\frac{\delta p'}{\rho} = g\delta y,$$

ce qui donne p' égal à $\rho g y$, plus une fonction indépendante de θ, ϖ et r. Or, à la surface du niveau de la mer, la valeur de $\alpha p'$ est égale à la pression de la petite colonne d'eau αy qui s'élève au-dessus de cette surface, et cette pression est égale à $\alpha\rho g y$; on a donc, dans tout l'intérieur de la masse fluide, depuis la surface du sphéroïde que la mer recouvre jusqu'à la surface du niveau de la mer, $p' = \rho g y$; ainsi un point quelconque de la surface du sphéroïde recouvert par la mer est plus pressé que dans l'état d'équilibre, de tout le poids de la petite colonne d'eau comprise entre la surface de la mer et la surface du niveau. Cet excès de pression devient négatif dans les points où la surface de la mer s'abaisse au-dessous de la surface du niveau.

Il suit de ce que nous venons de voir que, si l'on n'a égard qu'aux variations de θ et de ϖ, l'équation (L) se change dans l'équation (M) pour toutes les molécules intérieures de la masse fluide. Les valeurs de u et de v, relatives à toutes les molécules de la mer situées sur le même rayon terrestre, sont donc déterminées par les mêmes équations différentielles; ainsi, en supposant, comme nous le ferons dans la théorie du flux et du reflux de la mer, qu'à l'origine du mouvement les valeurs de u, $\frac{\partial u}{\partial t}$, v, $\frac{\partial v}{\partial t}$ ont été les mêmes pour toutes les molécules situées sur le même rayon, ces molécules resteront encore sur le même rayon durant les oscillations du fluide. Les valeurs de r, u et v peuvent donc être supposées les mêmes, à très-peu près, sur la petite partie du rayon terrestre comprise entre le solide que la mer recouvre et la surface de la mer; ainsi, en intégrant, par rapport à r, l'équation

$$0 = \frac{\partial . r^2 s}{\partial r} + r^2\left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \varpi} + \frac{u \cos\theta}{\sin\theta}\right),$$

on aura

$$0 = r^2 s - (r^2 s) + r^2 \gamma\left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \varpi} + \frac{u \cos\theta}{\sin\theta}\right),$$

$(r^2 s)$ étant la valeur de $r^2 s$ à la surface du sphéroïde recouvert par la mer. La fonction $r^2 s - (r^2 s)$ est égale à très-peu près à $r^2[s - (s)] + 2r\gamma(s)$, (s) étant ce que devient s à la surface du sphéroïde; on peut négliger le terme $2r\gamma(s)$, vu la petitesse de γ et de (s); on aura ainsi

$$r^2 s - (r^2 s) = r^2[s - (s)].$$

Maintenant, la profondeur de la mer, correspondante aux angles $\theta + \alpha u$ et $nt + \varpi + \alpha v$, est $\gamma + \alpha[s - (s)]$: si l'on fixe l'origine des angles θ et $nt + \varpi$ à un point et à un méridien fixes sur la surface de la Terre, ce qui est permis, comme on le verra bientôt, cette même profondeur sera $\gamma + \alpha u \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} + \alpha v \frac{\partial \gamma}{\partial \varpi}$, plus l'élévation αy de la molécule fluide de la surface de la mer au-dessus de sa surface de niveau; on aura donc

$$s - (s) = y + u\frac{\partial \gamma}{\partial \theta} + v\frac{\partial \gamma}{\partial \varpi}.$$

L'équation relative à la continuité du fluide deviendra, par conséquent,

$$(\mathrm{N}) \qquad y = -\frac{\partial . \gamma u}{\partial \theta} - \frac{\partial . \gamma v}{\partial \varpi} - \frac{\gamma u \cos\theta}{\sin\theta}.$$

On peut observer que, dans cette équation, les angles θ et $nt + \varpi$ sont comptés relativement à un point et à un méridien fixes sur la Terre, et que, dans l'équation (M), ces mêmes angles sont comptés relativement à l'axe des x et à un plan qui, passant par cet axe, aurait autour de lui un mouvement de rotation égal à n; or cet axe et ce plan ne sont pas fixes à la surface de la Terre, parce que l'attraction et la pression du fluide qui la recouvre doivent altérer un peu leur position sur cette surface, ainsi que le mouvement de rotation du sphéroïde. Mais il est aisé de voir que ces altérations sont aux valeurs de αu et de αv dans le rapport de la masse de la mer à celle du sphéroïde terrestre; ainsi, pour rapporter les angles θ et $nt+\varpi$ à un point et à un méridien invariables à la surface de ce sphéroïde dans les deux équations (M) et (N), il suffit d'altérer u et v de quantités de l'ordre $\frac{\gamma u}{r}$ et $\frac{\gamma v}{r}$, quantités que nous nous sommes permis de négliger; on peut donc supposer, dans ces équations, que αu et αv sont les mouvements du fluide en latitude et en longitude.

On peut observer encore que, le centre de gravité du sphéroïde étant supposé immobile, il faut transporter en sens contraire aux molécules fluides les forces dont il est animé par la réaction de la mer; mais, le centre commun de gravité du sphéroïde et de la mer ne changeant point en vertu de cette réaction, il est clair que le rapport de ces forces à celles dont les molécules sont animées par l'action du sphéroïde est du même ordre que le rapport de la masse fluide à celle du sphéroïde, et par conséquent de l'ordre $\frac{\gamma}{r}$; on peut donc les négliger dans le calcul de $\delta V'$.

37. Considérons de la même manière les mouvements de l'atmosphère. Nous ferons, dans cette recherche, abstraction de la variation de la chaleur à différentes latitudes et à diverses hauteurs, ainsi que de toutes les causes irrégulières qui l'agitent, et nous n'aurons égard qu'aux causes régulières qui agissent sur elle, comme sur l'océan. Nous supposerons conséquemment la mer recouverte d'un fluide élastique d'une température uniforme; nous supposerons encore, conformément à l'expérience, la densité de ce fluide proportionnelle à sa pression. Cette supposition donne à l'atmosphère une hauteur infinie;