RÉSUMÉ ANALYTIQUE

DE LA

THÉORIE DES MARÉES

TELLE QU'ELLE EST ÉTABLIE

DANS LA

MÉCANIQUE CÉLESTE DE LAPLACE

(SUITE) [1]

Laplace considère ensuite le cas où le sphéroïde, que recouvre le fluide, c'est-à-dire la mer, a un *mouvement de rotation*.

Si dans les équations (N) et (M), on fait $\cos\theta = \mu$ et que, dans l'équation (M), on indique, dans les différentielles dy et dV', que y et V' sont *fonctions* de μ et de ϖ, on obtiendra les équations suivantes :

$$(40) \text{ ou (A)} \qquad y = \left(\frac{d.\gamma u\sqrt{1-\mu^2}}{d\mu}\right) - \left(\frac{d.\gamma v}{d\varpi}\right)$$

$$(41) \text{ ou (B)} \begin{cases} \dfrac{d\mu}{1-\mu^2}\left[\left(\dfrac{d^2u}{dt^2}\right) - 2n\left(\dfrac{dv}{dt}\right)\mu\sqrt{1-\mu^2}\right] \\ + d\varpi\left[(1-\mu^2)\left(\dfrac{d^2v}{dt^2}\right) + 2n\left(\dfrac{du}{dt}\right)\mu\sqrt{1-\mu^2}\right] \\ = -g\left(\dfrac{dy}{d\mu}\right)d\mu - g\left(\dfrac{dy}{d\varpi}\right)d\varpi + \left(\dfrac{dV'}{d\mu}\right)d\mu + \left(\dfrac{dV'}{d\varpi}\right)d\varpi. \end{cases}$$

[1] Voir le numéro d'avril, page 116.

Mais LAPLACE fait remarquer que cette dernière relation doit exister quels que soient $d\mu$ et $d\varpi$, il en conclut que l'on doit alors avoir les deux relations suivantes :

$$(42) \text{ ou } (C) \begin{cases} \left(\dfrac{d^2u}{dt^2}\right) - 2n\left(\dfrac{dv}{dt}\right)\mu\sqrt{1-\mu^2} = g\left(\dfrac{dy}{d\mu}\right)\sqrt{1-\mu^2} - \left(\dfrac{dV'}{d\mu}\right)\sqrt{1-\mu^2} \\ \left(\dfrac{d^2v}{dt^2}\right) + 2n\left(\dfrac{du}{dt}\right)\dfrac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} = -g\dfrac{\left(\dfrac{dy}{d\varpi}\right)}{1-\mu^2} + \dfrac{\left(\dfrac{dV'}{d\varpi}\right)}{1-\mu^2} \end{cases}$$

Les équations (A) et (C) sont celles auxquelles conduit toute l'analyse de LAPLACE, et qui permettraient, une fois intégrées, d'obtenir les quantités y, u et v.

L'intégration de ces équations, dit l'auteur de la *Mécanique céleste*, présente beaucoup de difficultés; aussi il se borne à un cas *fort étendu, dit-il*, celui dans lequel γ, c'est-à-dire la profondeur de la mer, est une fonction de μ sans ϖ; autrement dit, LAPLACE suppose d'abord, la profondeur de la mer *la même sur tout un parallèle !*

Il pose alors :

$$(43) \begin{cases} y = a\cos(it + s\varpi + \varepsilon) \\ u = b\cos(it + s\varpi + \varepsilon) \\ v = c\sin(it + s\varpi + \varepsilon) \\ y - \dfrac{V'}{g} = a'\cos(it + s\varpi + \varepsilon) \end{cases}$$

a, b, c et a' étant des fonctions rationnelles de μ et de $\sqrt{1-\mu^2}$, s étant un nombre entier, et it un mouvement *moyen astronomique*.

En substituant ces valeurs, dans les équations (A) et (C), il trouve

$$(44) \begin{cases} b = \dfrac{g\left(\dfrac{da'}{d\mu}\right)(1-\mu^2) + \dfrac{2ngs}{i}\mu a'}{(i^2 - 4n^2\mu^2)\sqrt{1-\mu^2}} \\ c = \dfrac{\dfrac{2ng}{i}\left(\dfrac{da'}{d\mu}\right)\mu(1-\mu^2) - gsa'}{(i^2 - 4n^2\mu^2)(1-\mu^2)} \end{cases}$$

Et enfin, à l'aide de ces expressions et de la formule (A), et en posant

$$z = \frac{\gamma}{i^2 - 4n^2\mu^2}$$

il obtient l'équation

$$(50) \text{ ou (D)} \left\{ \begin{aligned} & a = gd \left\{ \frac{z\left[\frac{2ns}{i}\mu a' - \left(\frac{da'}{d\mu}\right)(1-\mu^2)\right]}{d\mu} \right\} \\ & + \frac{2ngs\mu z}{i(1-\mu^2)}\left[\frac{2ns}{i}\mu a' - \left(\frac{da'}{d\mu}\right)(1-\mu^2)\right] + \frac{s^2 g z a'(i^2 - 4n^2\mu^2)}{i^2(1-\mu^2)} \end{aligned} \right.$$

On voit, dit Laplace, que le 3e terme, à cause de la valeur de z, ne contient pas, à son dénominateur, la fonction $(i^2 - 4n^2\mu^2)$; le 2e terme ne le contiendra pas non plus, si

$$\frac{2ns}{i}\mu a' - \left(\frac{da'}{d\mu}\right)(1-\mu^2)$$

est *divisible* par cette fonction de μ.

L'auteur fait voir aussi que l'équation (D) renferme ce qu'il a démontré précédemment, dans le cas où l'on a

$$n = 0 \text{ et } \gamma = \text{constante};$$

c'est-à-dire que, dans le cas de la rotation considérée, et de la profondeur de la mer fonction de μ sans ϖ, il faut encore, pour la stabilité de l'équilibre des mers, que l'on ait $\rho > 1$. Dans le cours de sa démonstration, Laplace fait aussi voir que si, dans le développement de y, $Y^{(f)}$ satisfait à l'équation aux différentielles partielles

$$0 = \left\{ \frac{d\left[(1-\mu^2)\left(\frac{dY^{(f)}}{d\mu}\right)\right]}{d\mu} \right\} + \frac{\frac{d^2Y^{(f)}}{d\varpi^2}}{1-\mu^2} + f(f+1)\,Y^{(f)},$$

on aura la relation qui lie a' à a, qui sera

$$a' = \left[1 - \frac{3}{(2f+1)\rho}\right]a,$$

et celle qui lie i à f

$$i^2 = f(f+1)\,lg\left[1 - \frac{2}{(2f+1)\rho}\right]$$

Si l'on pouvait intégrer l'équation (D), le problème de la *détermination de la hauteur de la mer à un instant quelconque*, mais dans les conditions *exceptionnelles* dans lesquelles l'auteur de la *Mécanique céleste* a modifié le problème*, serait résolu.

L'intégration de l'équation (D), dit Laplace, surpasse les forces de l'analyse, aussi *n'essaie-t-il pas de l'intégrer*, mais il tâche SEULEMENT D'Y SATISFAIRE !

Il est clair, dit-il, que la partie des oscillations qui dépend de l'état *primitif* de la mer, a dû bientôt disparaître par les résistances de toutes sortes que les eaux de la mer éprouvent dans leurs mouvements; en sorte que, sans l'action du Soleil et de la Lune, la mer serait, depuis longtemps, dans un état *permanent d'équilibre*. L'action de ces deux astres l'en écarte sans cesse; il nous suffit donc, dit Laplace, *de connaître les oscillations qui en dépendent*.

Autrement dit, arrivé à ce point particulier de son analyse, qui lui a donné une ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE *qu'on ne peut pas intégrer*, Laplace cherche seulement les oscillations qui doivent exister dans l'action *attractive* des astres, sur les eaux de la mer, et il admet, *assez naturellement*, que ces *oscillations* doivent en déterminer de *correspondantes* dans le phénomène des marées.

En ne considérant que l'action *d'un* astre, et en se reportant à l'expression donnée page 144, on sait que cette action est représentée par

$$\frac{\alpha Z^2}{r^3}+\frac{\alpha Z^3}{r^4}+\frac{\alpha Z^4}{r^5}\cdots\cdots$$

dans laquelle on a

$$Z^{(i)}=\frac{1.3.5..(2i-1)}{1.2.3...i}\left[\delta^{(i)}-\frac{i(i-1)}{2(2i-1)}\delta^{i-2}+\cdots\cdots\right]$$

et

$$\delta=\cos\theta\sin v+\sin\theta\cos v\cos(nt+\varpi-\psi).$$

En négligeant les termes en r^4 et au-dessus, on trouve que la partie

* Il a supposé, en effet, que la Terre était entièrement recouverte d'eau et que la *profondeur de la mer* était la même sur tout un parallèle, c'est-à-dire qu'elle était une *fonction de* μ *sans* ϖ.

de $\alpha V'$, relative à l'action de l'astre L, est donnée par l'expression

$$\frac{3L}{2r^3}\left\{\left[\cos\theta \sin v + \cos v \sin\theta \cos(nt+\varpi-\psi)\right]^2 - \frac{1}{3}\right\}^*$$

En supposant, toutefois, le rayon de la Terre, au point considéré, comme étant égal à 1.

En développant le carré, et en remplaçant

$$\begin{array}{ll} \cos^2(nt+\varpi-\psi) & \text{par } \dfrac{1+\cos 2(nt+\varpi-\psi)}{2} \\ \sin^2\theta & \text{par } \dfrac{1-\cos 2\theta}{2} \\ \cos^2\theta & \text{par } \dfrac{1+\cos 2\theta}{2} \end{array}$$

l'expression précédente donne lieu aux trois termes suivants :

$$(51)\quad \left\{\begin{array}{ll} 1^{\text{er}} \text{ terme} & \dfrac{L}{4r^3}\left(\sin^2 v - \dfrac{1}{2}\cos^2 v\right)(1+3\cos 2\theta); \\ 2^{\text{me}} \text{ terme} & +\dfrac{3L}{r^3}\sin\theta\cos\theta\sin v\cos v\cos(nt+\varpi-\psi); \\ 3^{\text{me}} \text{ terme} & +\dfrac{3L}{4r^3}\sin^2\theta\cos^2 v\cos 2(nt+\varpi-\psi); \end{array}\right.$$

Les quantités r, v, ψ variant avec une grande lenteur, par rapport à la variation de nt, due au mouvement de la Terre, ces trois termes donnent lieu à *trois espèces d'oscillations*.

Le *premier* terme donne lieu à une oscillation *fort longue*, puisqu'elle est indépendante du mouvement de rotation de la Terre, et ne dépend que de la *déclinaison* de l'astre.

Le second terme donne lieu à une oscillation que Laplace nomme

* Si l'on voulait avoir égard au terme en r^4, il faudrait ajouter à cette expression la suivante :

$$\frac{5L}{2r^4}\left[\left(\cos\theta\sin v + \cos v\sin\theta\cos(nt+\varpi-\psi)\right)^3 - \frac{3}{5}\left(\cos\theta\sin v + \cos v\sin\theta\cos(nt+\varpi-\psi)\right)\right]$$

de la *seconde espèce*, qui dépend principalement de la rotation de la Terre et qui a une durée d'*un jour* environ.

Enfin, le troisième terme donne lieu à une oscillation qu'il nomme de la *troisième espèce*, qui dépend aussi principalement de la rotation de la Terre, et ayant une durée d'environ un *demi-jour*.

L'équation (D), dit LAPLACE, étant différentielle *linéaire*, il doit en résulter que les *trois espèces d'oscillations* se mêlent sans se confondre. Nous pouvons donc, dit-il, les considérer séparément.

Il discute alors, successivement, ces trois termes dus à l'action de l'astre, en admettant qu'elles déterminent *trois espèces d'oscillations*, dans les mouvements de la mer.

Il discute donc d'abord l'oscillation de la *première espèce*, dont l'expression est

$$\frac{L}{4r^3}\left(\sin^2 v - \frac{1}{2}\cos^2 v\right)(1 + 3\cos 2\theta)$$

et cherche son influence sur la hauteur αy de la mer, au point considéré, à l'instant t.

Il suppose que le sphéroïde, recouvert par la mer, est un *ellipsoïde de révolution*.

Dans ce cas, l'expression γ de la profondeur de la mer est de la forme $l(1 - q\mu^2)$; ce qui est facile à démontrer.

La relation

$$z = \frac{\gamma}{i^2 - 4n^2\mu^2},$$

devient

$$z = \frac{l(1 - q\mu^2)}{i^2 - 4n^2\mu^2}.$$

Si l'on considère l'équation (D), il fait remarquer que, comme les oscillations de la *première espèce* ne contiennent pas ϖ, on doit, quand on n'a égard qu'à ces oscillations, faire s, coefficient de ϖ, égal à zéro, dans les expressions de y, u, v et $y - \frac{V'}{g}$.

LAPLACE démontre, alors, que si l'on fait $s = o$ dans l'équation (D), on pourra satisfaire à cette équation par une loi déterminée de la *profondeur de la mer*, c'est-à-dire par une valeur particulière de q.

En déterminant cette valeur, il trouve

$$q = \frac{2n^2}{f(2f+1)\left[1 - \frac{3}{(4f+1)\rho}\right] lg}.$$

En supposant donc la profondeur de la mer égale à $l - ql\mu^2$, on aura les oscillations de la *première* espèce. Dans cette valeur de q, f est tel que $Q\mu^{2f}$ est le terme le *plus élevé* en μ, dans la valeur de a supposée développée dans la série suivante :

$$a = P^{(0)} + P^{(2)} + P^{(4)} \ldots + P^{(2f)},$$

$P^{(0)}$ étant supposé une constante, et $P^{(2)}$, $P^{(4)}$, $P^{(2f)}$ des fonctions de μ^2 satisfaisant, *quel que soit f*, à l'équation aux différentielles partielles

$$0 = \frac{d\left[(1-\mu^2)\left(\frac{dP^{(2f)}}{d\mu}\right)\right]}{d\mu} + 2f(2f+1)P^{(2f)}.$$

Il est à remarquer que $\frac{n^2}{g}$ est le rapport de la force centrifuge à la pesanteur, à l'*Équateur*, rapport égal à $\frac{1}{289}$.

En supposant que f soit un nombre assez grand, tel que 12 ou 14, q deviendra assez petit pour être négligé. Dans ce cas, l'expression des oscillations de la *première* espèce donnera, à très peu près, ces oscillations dans le cas où la profondeur de la mer serait *constante.*

Laplace détermine ensuite la valeur de αy relativement aux *oscillations* de la *première espèce.* Il trouve que l'on a

$$\alpha y = \frac{L\left(\sin^2 v - \frac{1}{2}\cos^2 v\right)(1 + 3\cos 2\theta)}{4r^3 g\left(1 - \frac{3}{5\rho}\right)}. \tag{52}$$

Pour arriver à cette expression, l'auteur fait d'abord remarquer que, si l'on développe le terme

$$\frac{L}{4r^3}\left(\sin^2 v - \frac{1}{2}\cos^2 v\right)(1+3\cos 2\theta)$$

en *sinus* et *cosinus* d'angles proportionnels au temps, et que l'on désigne par

$$\alpha k(1+3\cos 2\theta)\cos(it+A) \tag{53}$$

un terme quelconque de ce développement, k sera multiplié par la tangente de l'inclinaison de *l'orbite lunaire* à *l'Écliptique*, dans le terme où it sera le moyen mouvement des nœuds de l'orbite lunaire (ceci résulte de ce qu'il a démontré dans le livre II de la *Mécanique céleste*).

Mais, à raison de la petitesse de ce moyen mouvement, i sera *très petit ;* alors la valeur de c (44) qui devient, en faisant $s=o$

$$c=\frac{\frac{2ng}{i}\left(\frac{da'}{d\mu}\right)\mu}{(i^2-4n^2\mu^2)}$$

sera *très grande* dans les oscillations de la première espèce, à cause du facteur $\frac{2ng}{i}$.

Nous comprenons que it, dans la valeur (53), autant qu'on considère les oscillations de la *première* espèce, *où nt n'entre pas*, ne peut représenter, dans les développements relatifs au temps, que soit le *mouvement moyen* de la Lune, soit le *mouvement moyen* du Soleil, soit, enfin, le *moyen mouvement des nœuds de la Lune.*

On doit cependant faire ici, dit LAPLACE, une *observation importante*, c'est que les résistances que les eaux de la mer éprouvent *doivent laisser très peu d'étendue à ces oscillations.*

Pour faire voir, incidemment, le peu de grandeur des oscillations de la *première espèce*, LAPLACE suppose la résistance *proportionnelle à la vitesse*, et il nomme 6 le coefficient de résistance.

En partant de l'équation (23) ou (M), dans laquelle il fait $r=1$, et en faisant encore remarquer que dy et dV' représentent les différentielles totales de y et de V', relatives à θ et à ϖ, il arrive aux deux équations:

$$(54)\quad \left(\frac{d^2u}{dt^2}\right) - 2n\left(\frac{dv}{dt}\right)\sin\theta\cos\theta = g\left(\frac{dy}{d\mu}\right)\sqrt{1-\mu^2} - \left(\frac{dV'}{d\mu}\right)\sqrt{1-\mu^2}.$$

$$(55)\quad \left(\frac{d^2v}{dt^2}\right) + \frac{2n\mu\left(\frac{du}{dt}\right)}{\sqrt{1-\mu^2}} = -g\frac{\left(\frac{dy}{d\varpi}\right)}{1-\mu^2} + \frac{\left(\frac{dV'}{d\varpi}\right)}{1-\mu^2}.$$

Mais, dit-il, dès que l'on suppose la résistance éprouvée par la mer proportionnelle à la vitesse $\left(\frac{du}{dt}\right)$ et $\left(\frac{dv}{dt}\right)$ (suivant le méridien et le parallèle), on doit introduire, dans les équations ci-dessus, respectivement, les termes

$$6\left(\frac{du}{dt}\right) \quad \text{et} \quad 6\left(\frac{dv}{dt}\right)$$

et ne considérer, *dans ces équations*, que les termes *dépendants de l'angle it*, dans lesquels i est *très petit** et *beaucoup moindre que* 6.

A l'aide des relations

$$u = b\cos(it+\varepsilon)$$
$$v = c\sin(it+\varepsilon),$$

qui se déduisent des relations (43), en y faisant $s=0$, et en *différentiant deux fois ces valeurs* de u et de v, comme on a,

$$\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right) = -i^2 b\cos(it+\varepsilon) \quad \text{et} \quad 6\left(\frac{du}{dt}\right) = i6b\sin(it+\varepsilon)$$

et

$$\left(\frac{d^2v}{dt^2}\right) = -i^2 c\sin(it+\varepsilon) \quad \text{et} \quad 6\left(\frac{dv}{dt}\right) = i6c\cos(it+\varepsilon),$$

LAPLACE fait remarquer que, i étant supposé beaucoup plus faible que 6, on doit pouvoir négliger $\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)$ et $\left(\frac{d^2v}{dt^2}\right)$, dans les équations (54) et (55), en présence des termes $6\left(\frac{du}{dt}\right)$ et $6\left(\frac{dv}{dt}\right)$; et comme,

* Puisque dans les oscillations de la première espèce nt n'entre pas.

dans le cas qui nous occupe, ayant supposé γ, une fonction de μ sans ϖ, les termes en $\left(\frac{dy}{d\varpi}\right)$ et $\left(\frac{dV'}{d\varpi}\right)$ n'existent pas, l'équation (55) se réduit à l'expression

$$\frac{2n\mu\left(\frac{du}{dt}\right)}{\sqrt{1-\mu^2}}+6\left(\frac{dv}{dt}\right)=0.$$

Cette relation, transportée dans l'équation (54), dans laquelle $\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)$ est aussi supprimé, donne l'équation

$$(56)\qquad \frac{6^2+4n^2\mu^2}{6}\left(\frac{du}{dt}\right)=g\left(\frac{dy}{d\mu}\right)\sqrt{1-\mu^2}-\left(\frac{dV'}{d\mu}\right)\sqrt{1-\mu^2},$$

équation qui doit être combinée avec l'équation (N) qui, en remarquant que γ a été supposé indépendant de ϖ, est ici

$$y=\frac{d.\gamma u\sqrt{1-\mu^2}}{d\mu.}.$$

Laplace *néglige d'abord le premier membre* de l'équation (56), ce qui lui donne

$$g\left(\frac{dy}{d\mu}\right)-\left(\frac{dV'}{d\mu}\right)=0$$

d'où, en intégrant,

$$y=\frac{V'}{g},$$

valeur à laquelle *il se tient*, tout en indiquant que par la comparaison de ces deux valeurs de y, on pourrait obtenir une valeur de u qui permettrait une seconde approximation.

Il fait ensuite remarquer que la partie de V', relative à l'action de l'astre L, est de la forme

$$k(1+3\cos 2\theta)\cos(it+A),$$

ou, en faisant $\cos\theta = \mu$, de la forme

$$6k\left(\mu^2 - \frac{1}{3}\right)\cos(it + A);$$

que la partie correspondante de y doit être de la forme

$$Q\left(\mu^2 - \frac{1}{3}\right)\cos(it + A),$$

et que la partie correspondante de V', due à l'action de la couche aqueuse sur la molécule dm, est égale à cette dernière expression multipliée par

$$\frac{3}{(2f+1)\rho}$$

où $f = 2$ pour que l'expression puisse satisfaire à l'équation aux différentielles partielles, indiquée dans le cours de cette analyse.

L'équation $gy - V' = o$, devient alors, en introduisant pour y et V', ces expressions :

$$\left(1 - \frac{3}{5\rho}\right)gQ\left(\mu^2 - \frac{1}{3}\right)\cos(it + A) - 6k\left(\mu^2 - \frac{1}{3}\right)\cos(it + A) =$$

ce qui permet de trouver

$$Q = \frac{6k}{g\left(1 - \frac{3}{5\rho}\right)}$$

et d'avoir, par suite,

$$\alpha y = \frac{6\alpha k\left(\mu^2 - \frac{1}{3}\right)\cos(it + A)}{g\left(1 - \frac{3}{5\rho}\right)}$$

ou, comme la somme de tous les termes

$$\alpha k \cos(it + A)$$

est égale, évidemment, à

$$\frac{L}{4\,r^3}\left(\sin^2 v - \frac{1}{2}\cos^2 v\right),$$

on trouve, enfin, pour la *valeur complète de* αy, relative aux oscillations de la *première espèce*, ainsi que nous l'avons indiqué plus haut,

$$(57) \qquad \alpha y = \frac{L\left(\sin^2 v - \frac{1}{2}\cos^2 v\right)(1 + 3\cos 2\theta)}{4\,r^3 g\left(1 - \frac{3}{5\rho}\right)}.$$

Ce résultat a été obtenu en supposant la résistance *proportionnelle* à la vitesse; il n'en subsiste pas moins, dit LAPLACE, quelle que soit la loi de la résistance.

LAPLACE discute ensuite les oscillations qu'il nomme de la *seconde espèce* et qui sont produites par le second terme (51) qui est, en faisant $\cos\theta = \mu$,

$$(58) \qquad \frac{3\,L}{r^3}\,\mu\sqrt{1-\mu^2}\,\sin v \cos v \cos(nt + \varpi - \psi).$$

r, v et $n\,t$ sont fonctions du temps; le développement de cette expression en fonction du temps, donne une suite de termes de la forme.

$$\alpha\,k\,\mu\sqrt{1-\mu^2}\cos(it + \varpi - A),$$

i étant fort peu différent de n, à cause de la *lenteur du mouvement de l'astre* par rapport au mouvement de rotation de la terre.

L'auteur considère encore l'équation (50) ou (D) et y fait $s = 1$, puisque le coefficient de ϖ est 1.

Il admet toujours que la Terre *est un solide de révolution*, entièrement recouvert par une couche aqueuse, ayant aussi la forme d'un *ellipsoïde de révolution*, de manière que la profondeur de la mer est toujours une fonction de μ sans ϖ.

Il pose encore

$$z = \frac{l\,(1 - q\,\mu^2)}{i^2 - 4\,n^2\,\mu^2};$$

Ensuite, comme l'expression (58) contient $\mu\sqrt{1-\mu^2}$ en facteur, LAPLACE suppose que a est exprimé par la suite

(59) $$a=\mu\sqrt{1-\mu^2}\left[\mathrm{P}^{(0)}+\mathrm{P}^{(2)}+\mathrm{P}^{(4)}\ldots\ldots+\mathrm{P}^{(2f-2)}\right],$$

$\mathrm{P}^{(0)}$, $\mathrm{P},^{(2)}$.... etc. étant des fonctions de μ^2, contenant chacune un facteur indéterminé, ces fonctions étant telles qu'en désignant par $\mathrm{Y}^{(2f)}$, la fonction.

$$\mu\sqrt{1-\mu^2}\,\mathrm{P}^{(2f-2)}$$

on ait, quel que soit f

$$0=\left\{\frac{d\left[(1-\mu^2)\dfrac{d\,\mathrm{Y}^{(2f)}}{d\mu}\right]}{d\mu}\right\}-\frac{\mathrm{Y}^{(2f)}}{1-\mu^2}+2f(2f+1)\,\mathrm{Y}^{(2f)}.$$

La relation qui lie a' à a, sera ici, en faisant $f=2f$,

$$a'=a\left(1-\frac{3}{(4f+1)\rho}\right)$$

et il trouve, alors, que

(60) $$\left\{\begin{aligned}a'=\mu\sqrt{1-\mu^2}&\left[\left(1-\frac{3}{5\rho}\right)\mathrm{P}^{(0)}+\left(1-\frac{3}{9\rho}\right)\mathrm{P}^{(2)}\ldots\ldots\right.\\&\left.+\left(1-\frac{3}{(4f+1)\rho}\right)\mathrm{P}^{(2f-2)}-\frac{k}{g}\right].\end{aligned}\right.$$

En supposant que les constantes *indéterminées* qui entrent, comme facteur, dans chacune des fonctions $\mathrm{P}^{(0)}$, $\mathrm{P}^{(2)}$, etc., soient telles que la fonction

$$\frac{2n}{i}\mu a'-\left(\frac{d a'}{d\mu}\right)(1-\mu^2)$$

soit divisible par $i^2-4n^2\mu^2$, ce qui ne demande qu'une *seule équation de condition*, LAPLACE indique que le second membre de l'équateur (D), puisque $s=1$, n'aura plus de dénominateur.

En substituant, alors, dans cette équation, pour a et a' les valeurs (59) et (60), la comparaison des puissances semblables de μ donnera f équations de conditions, qui, réunies à la première, donnera $f+1$ *équations de conditions*, ce qui est le nombre *nécessaire* pour l'entière détermination des arbitraires.

Pour avoir la valeur de q, contenue dans z, il désigne par

$$Q\mu^{2f-1}\sqrt{1-\mu^2}$$

le terme de l'expression de a le plus élevé en μ, et il en déduit le terme en a', correspondant; il le trouve égal à

$$Q\left(1-\frac{3}{(2f+1)\rho}\right)\mu^{2f-1}\sqrt{1-\mu^2}.$$

En cherchant le terme correspondant dans l'équation (D), après y avoir fait $s=1$, il trouve

$$\frac{lg\,q}{2n^2}\left(2f^2+f+\frac{n}{i}\right)Q\left(1-\frac{3}{(4f+1)\rho}\right)\mu^{2f-1}\sqrt{1-\mu^2}.$$

D'après cela, et en égalant ce terme au terme correspondant de a, Laplace trouve

$$q=\frac{2n^2}{lg\left[1-\frac{3}{(4f+1)\rho}\right]\left(2f^2+f+\frac{n}{i}\right)}.$$

Ainsi, la profondeur de la mer étant supposée égale à $l\,(1-q\mu^2)$; q ayant la valeur ci-dessus, on pourra déterminer, *par l'analyse précédente*, les oscillations de la *seconde espèce*.

Laplace fait remarquer que cette profondeur de la mer dépend de $\frac{n}{i}$, c'est-à-dire de i, puisque n est constant. Elle n'est donc pas la même pour tous les termes où i diffère. Mais, pour les oscillations de la *seconde espèce*, on peut supposer i peu différent de n; c'est-à-dire $\frac{n}{i}=1$, et alors la loi précédente de la profondeur de la mer devient indépendante de i. Elle est même à très peu près égale, dit Laplace, à celle trouvée précédemment, si l'on suppose que l'on puisse négliger $\frac{n}{i}$, vis-à-vis de $2f^2+f=f\,(2f+1)$.

Si, dans la valeur de z, nous faisons $i = n$, il vient

$$z = \frac{l(1 - q\mu^2)}{n^2(1 - 4\mu^2)}.$$

Supposons, actuellement, que, dans l'équation (D), nous fassions

$$s = 1, \quad i = n \quad \text{et} \quad a = Q\mu\sqrt{1-\mu^2}.$$

des deux formules (59) et (60), on déduira

$$a' = \left\{\left(1 - \frac{3}{5\rho}\right)Q - \frac{k}{g}\right\}\mu\sqrt{1-\mu^2},$$

et on obtiendra, ainsi que l'indique Laplace,

$$a = \frac{2\,lg\,g.\,a'}{n^2}.$$

Cette valeur de a devant être égale à celle supposée ci-dessus

$$Q\mu\sqrt{1-\mu^2},$$

on trouvera, à l'aide de ces deux valeurs de a et de la valeur de a',

$$Q = \frac{2\,lg\,k}{2\,lg\,q\left(1 - \frac{3}{5\rho}\right) - n^2}.$$

Laplace trouve alors, pour valeur entière de αy, relative aux oscillations de la *seconde espèce*.

$$\frac{\frac{6L}{r^3}\,lq \sin\theta\cos\theta\sin v\cos v\cos(nt + \varpi - \psi)}{2\,lg\,q\left(1 - \frac{3}{5\rho}\right) - n^2}.$$

Cette valeur existe quel que soit q, c'est-à-dire quelle que soit la profondeur de la mer, pourvu que le sphéroïde que recouvre la mer et elle-même soient des *ellipsoïdes de révolution*.

La différence des deux marées, *d'un même jour*, ne *dépend que des oscillations de la seconde espèce*, qui ont leur *maximum* pour

$$nt + \varpi - \psi = 0$$

et

$$nt + \varpi - \psi = 180^{\circ},$$

c'est-à-dire, aux *deux instants où l'astre passe au Méridien.*

D'après cela, dit LAPLACE, l'excès de la marée du *premier* passage sur la marée du *second*, est

$$\frac{12\,L}{r^3}\,\frac{lq \sin \theta \cos \theta \sin v \cos v}{2\,lg\,q\left(1 - \frac{3}{5\rho}\right) - n^2}.$$

L'*illustre astronome* veut comparer ce résultat à ce qui a lieu dans les ports de la Manche, où les marées ne sont nullement la conséquence des oscillations qu'il discute à ce point-ci de son analyse. Il considère, en effet, *simplement*, les *actions d'un astre sur une molécule dm, au moment où cet astre passe au méridien de la molécule.* Il est clair que cela n'a aucun rapport avec le phénomène des marées, tel qu'on l'observe sur les côtes de l'Océan, où l'élévation des eaux dépend non seulement de la valeur αy, considérée par LAPLACE, *mais surtout des valeurs* αu et αv et *de la forme des côtes et aussi de la plage*. Aussi, *ses conclusions, comme il le dit lui-même,* LAISSENT-ELLES BEAUCOUP A DÉSIRER.

Par des considérations analytiques, analogues à celles dont il a fait usage pour les oscillations de la *première* espèce, LAPLACE trouve, relativement à celles de la *seconde* espèce,

$$\alpha u = \frac{\frac{3\,L}{r^3} \sin v \cos v \cos (nt + \varpi - \psi)}{2\,lg\,q\left(1 - \frac{3}{5\rho}\right) - n^2}$$

et

$$\alpha v = \frac{\frac{3\,L}{r^3}\frac{\cos \theta}{\sin \theta}. \sin v \cos v \cos (nt + \varpi - \psi)}{2\,lg\,q\left(1 - \frac{3}{5\rho}\right) - n^2.}.$$

Laplace aborde ensuite la discussion des oscillations de la *troisième espèce*.

La partie de l'action de l'astre L, produisant ces oscillations, est égale à

$$\frac{3\,\mathrm{L}}{4\,r^3}\sin^2\theta\cos^2 v\cos 2(nt+\varpi-\psi).$$

Le développement de cette expression, en cosinus d'angles croissant *proportionnellement* au temps, ou plutôt avec le temps, donne une suite de termes de la forme

$$\alpha\,k\sin^2\theta\cos(it+2\varpi-\mathrm{A})$$

i étant peu différent de $2n$.

En reprenant l'équation (D); en y faisant $s=2$, et en supposant toujours que la profondeur de la mer soit une fonction de μ sans ϖ, Laplace trouve encore pour expression de l'action de l'astre et de la couche aqueuse dont le rayon intérieur étant l'unité, le rayon extérieur est $1+\alpha y$,

$$a'=(1-\mu^2)\left[\left(1-\frac{3}{5\rho}\right)\mathrm{P}^{(0)}+\left(1-\frac{3}{9\rho}\right)\mathrm{P}^2\ldots\ldots\right.$$
$$\left.+\left(1-\frac{3}{(4f+1)\rho}\right)\mathrm{P}^{2f-2}-\frac{k}{g}\right].$$

Il fait ensuite voir, ainsi qu'il l'a fait pour les oscillations de la *seconde* espèce, qu'on peut obtenir $f+1$ *équations de conditions* permettant de déterminer les $f+1$ *indéterminées* qui font que l'équation (D) n'a plus de dénominateur.

Il détermine ensuite la valeur de q de l'expression z, en suivant une marche complètement analogue à celle qu'il a employée pour les oscillations de la *seconde* espèce.

Il trouve alors

$$q=\frac{2\,n^2}{lg\left(1-\frac{3}{(4f+1)\rho}\right)\left(2f^2+f+\frac{2n}{i}\right)}.$$

Ainsi, dit-il, en supposant la profondeur de la mer égale à

$$l - \frac{2\, n^2 \mu^2}{g\left(1 - \frac{3}{(4f+1)\rho}\right)\left(2f^2+f+\frac{2n}{i}\right)}.$$

on pourra déterminer les oscillations de la *troisième* espèce.

Laplace fait remarquer que comme i diffère peu de $2n$, on peut faire, approximativement, $\frac{2n}{i} = 1$, et alors on a, pour profondeur de la mer, la même expression que celle précédemment trouvée relativement aux oscillations de la *seconde* espèce; ce qui, en tout cas, est nécessaire pour que *cette loi puisse être admise.*

En supposant f assez grand pour qu'on puisse négliger l'unité en présence de $2f^2+f$, cette dernière loi de la profondeur de la mer coïncide avec celle trouvée relativement aux oscillations de la *première* espèce.

Toutefois, comme Laplace a fait voir que les résistances éprouvées par la mer, dans ses mouvements, rendent les oscillations de la *première* espèce *indépendantes de la loi de la profondeur de la mer*, il suffira, dit-il, de considérer les lois de profondeur dans lesquelles on pourra déterminer, à la fois, les oscillations de la *seconde* et de la *troisième* espèce.

Avant de terminer sa discussion relativement aux oscillations de la *troisième* espèce, Laplace considère ces oscillations en supposant que la profondeur de la mer soit à peu près *constante*, c'est-à-dire lorsqu'on a

$$z = \frac{l}{4\, n^2 (1-\mu^2)},$$

l étant une constante

Il fait

$$y = a \cos(2\, nt + 2\,\varpi - 2\,\psi)$$

et

$$y - \frac{V'}{g} = a' \cos(2\, nt + 2\,\varpi - 2\,\psi).$$

et il en conclut, en rappelant que relativement aux oscillations de la *troisième* espèce,

$$\alpha V' = \frac{3L}{4r^3} \sin^2\theta \cos^2 v \cos(2nt + 2\varpi - 2\psi),$$

l'expression

$$\alpha a' = \alpha a - \frac{3L}{4r^3 g} (1 - \mu^2) \cos^2 v.$$

Il introduit cette valeur de a' dans l'équation (D), et il considère ensuite, individuellement, les termes de cette équation, dans laquelle il fait $2n = i$, $s = 2$ et $(1 - \mu^2) = x^2$, afin d'arriver à une expression plus simple. Il trouve, enfin, l'équation

$$0 = x^2(1 - x^2)\alpha\left(\frac{d^2 a}{dx^2}\right) - x.\alpha\left(\frac{da}{dx}\right) - 2\alpha a\left(4 - x^2 - \frac{2n^2}{lg}x^4\right)$$
$$+ \frac{6L(1 - x^2)n^2 \cos v}{r^3 g}.$$

Pour satisfaire à cette équation il fait

$$\alpha a = A^{(1)}x^2 + A^{(2)}x^4 + A^{(3)}x^6 + \ldots\, A^{(f)}x^{2f} + A^{(f+1)}x^{2f+2} + A^{(f+2)}x^{2f+4}$$

ce qui lui permet d'obtenir, en déduisant de cette dernière expression les coefficients différentiels $\left(\frac{da}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2 a}{dx^2}\right)$, la relation

$$0 = x^2(1 - x^2)(2A^{(1)} + 12A^{(2)}x^2 + \ldots\ldots) - x(2A^{(1)}x + 4A^{(2)}x^3 \ldots\ldots)$$
$$- 2(A^{(1)}x^2 + A^{(2)}x^4 \ldots\ldots)\left\{4 - x^2 - \frac{2n^2}{lg}x^4\right\} + \frac{6L}{r^3 g}x^2(1 - x^2)\cos^2 v.$$

Si l'on effectuait les multiplications, dit Laplace, et qu'on ordonnât par rapport aux puissances croissantes de x^2, il est clair que les coefficients doivent être *nuls séparément*, c'est ce qui permet de déterminer $A^{(1)}$, $A^{(2)}$.

Il trouve bien d'abord,

$$A^{(1)} = \frac{3L}{4r^3 g} \cos^2 v,$$

mais, en annulant le coefficient de x^4 pour avoir $A^{(2)}$, il trouve que ce coefficient se réduit à $\frac{6L}{r^3 g}\cos^2 v$, ce qui ne permet pas d'obtenir $A^{(2)}$.

Il considère alors, d'une autre manière, cette détermination et commence par établir une relation entre trois coefficients consécutifs; il trouve

$$A^{(f+2)}(2f^2+6f)-A^{(f+1)}(2f^2+3f)+\frac{2n^2}{lg}A^f=0.$$

ce qui permettra d'obtenir tous les coefficients lorsque $A^{(1)}$ et $A^{(2)}$ seront connus!

De cette dernière relation, il déduit d'abord

$$\frac{A^{(f+1)}}{A^{(f)}}=\frac{\frac{2n^2}{lg}}{2f^2+3f-(2f^2+6f)\frac{A^{(f+2)}}{A^{(f+1)}}}$$

et, en faisant successivement, dans cette expression, $f=f+1$, et ainsi de suite, il arrive à exprimer le rapport $\frac{A^{(f+1)}}{A^{(f)}}$ en fraction continue, et il obtient, en supposant $f=1$,

$$A^{(2)}=\cfrac{\frac{2n^2}{lg}A^{(1)}}{2.1^2+3.1-\cfrac{\frac{4n^2}{lg}(1^2+3.1)}{2.2^2+3.2-\cfrac{\frac{4n^2}{lg}(2^2+3.2)}{2.3^2+3.3-\cfrac{\frac{4n^2}{lg}(3^2+3.3)}{2.4^2+3.4.}}}}$$

ce qui donne la valeur de $A^{(2)}$ en fonction de $A^{(1)}$.

Nous savons que $\frac{n^2}{g}$ est le rapport de la *force centrifuge* à la pesanteur, rapport qui est égal à $\frac{1}{289}$; en supposant successivement

$$\frac{2n^2}{lg}=20, \quad \frac{2n^2}{lg}=5, \quad \frac{2n^2}{lg}=\frac{5}{2}, \ldots\ldots$$

les profondeurs de la mer correspondantes seront $\frac{1}{2890}$, $\frac{1}{722,5}$, $\frac{1}{361,25}$, le rayon terrestre étant pris pour unité.

En introduisant successivement ces valeurs dans le coefficient de $A^{(1)}$, on trouve successivement,

$$A^{(2)} = 20,1862\,A^{(1)}$$
$$A^{(2)} = 6,1960\,A^{(1)}$$
$$A^{(2)} = 0,7504\,A^{(1)}.$$

et alors, comme les autres coefficients $A^{(3)}$, $A^{(4)}$, etc., se déduisent de ces deux-ci, on trouve finalement, pour valeurs correspondantes de αa :

Pour la profondeur

$$l=\frac{1}{2890}, \quad \alpha a = \frac{3L}{4r^3 g} x^2 \cos^2 v \begin{cases} 1,0000 + 20,1862\,x^2 + 10,1164\,x^4 \\ -13,1047\,x^6 - 15,4488\,x^8 - 7,4561\,x^{10} \\ -2,1975\,x^{12} - 0,4501\,x^{14} - 0,0687\,x^{16} \\ -0,0082\,x^{18} - 0,0008\,x^{20} - 0,0001\,x^{22}. \end{cases}$$

pour

$$l=\frac{1}{722,5}, \quad \alpha a = \frac{3L}{4r^3 g} x^2 \cos^2 v \begin{cases} 1,0000 + 6,1960\,x^2 + 3,2474\,x^4 \\ +0,7238\,x^6 + 0,0919\,x^8 + 0,0076\,x^{10} \\ +0,0004\,x^{12} \end{cases}$$

pour

$$l=\frac{1}{361,25}, \quad \alpha a = \frac{3L}{4r^3 g} x^2 \cos^2 v \begin{cases} 1,0000 + 0,7504\,x^2 + 0,1566\,x^4 \\ +0,01574\,x^6 + 0,0009\,x^8. \end{cases}$$

Laplace considère ensuite l'ensemble des trois oscillations sur la valeur de αy, et il trouve, en négligeant la densité de la mer par rapport à celle de la Terre, et en rappelant que les oscillations de la *seconde* espèce sont *nulles* lorsque l'on suppose *constante* la profondeur de la mer,

$$\alpha y = \frac{L}{4r^3 g}\left\{\sin^2 v - \frac{1}{2}\cos^2 v\right\}(1 + 3\cos 2\theta) + \alpha a \cos(2nt + 2\varpi - 2\psi).$$

En nommant e le *rapport* de la masse de la Lune, divisée par le *cube de sa moyenne distance* à la Terre, à la masse du Soleil *divisée par le cube de sa moyenne distance* à la Terre; en appelant v et ψ la déclinaison et l'ascension droite du Soleil, v' et ψ' celles de la Lune, LAPLACE trouve, *pour l'action réunie de ces deux astres*, et, en supposant la profondeur de la mer *constante* et égale à $\frac{1}{2890}$, c'est-à-dire à 2,200 mètres environ, et *aussi le globe entièrement recouvert d'eau*,

$$(61)\left\{\begin{aligned}\alpha y = {} & 0^{\mathrm{m}},12316 \left\{\frac{1+3\cos 2\theta}{3}\right\} \left\{\sin^2 \mathrm{v} - \frac{1}{2}\cos^2 \mathrm{v} + e\sin^2 \mathrm{v}' - \frac{1}{2} e\cos^2 \mathrm{v}'\right\} \\ & + 0^{\mathrm{m}},12316 \left\{\begin{array}{l} 1,0000 + 20,1862\,x^2 \\ + 10,1164\,x^4 - 13,1047\,x^6 \\ - 15,4488\,x^8 - 7,4581\,x^{10} \\ - 2,1975\,x^{12} - 0,4501\,x^{14} \\ - 0,0687\,x^{16} - 0,0082\,x^{18} \\ - 0,0008\,x^{20} - 0,0001\,x^{22} \end{array}\right\} x^2 . \left\{\begin{array}{l} \cos^2 \mathrm{v} \cos(2nt \\ \quad + 2\varpi - 2\psi) \\ + e\cos^2 \mathrm{v}' \cos(2nt \\ \quad + 2\varpi - 2\psi') \end{array}\right\}.\end{aligned}\right.$$

LAPLACE a trouvé par la comparaison des observations, que $l = 3$ environ, *dans les moyennes distances de la Lune et du Soleil.*

En supposant ces deux astres à ces distances et de plus en *opposition* ou en *conjonction*, dans le plan de l'équateur, la valeur *maximum* de αy répondra au cas où

$$2nt + 2\varpi - 2\psi = 0$$

et la valeur *minimum* au cas où

$$2nt + 2\varpi - 2\psi = 180^\circ.$$

Si l'on considère les eaux à l'Équateur, il faudra faire $\theta = 90^\circ$, ou $x = 1$, dans la formule précédente, et aussi, d'après l'hypothèse, $\mathrm{v} = \mathrm{v}' = 0$; on trouve alors, pour valeur de αy, au moment où l'on a $2nt + 2\varpi - 2\psi = 0$, c'est-à-dire où les astres *passent au méridien*, et en effectuant les opérations indiquées dans le coefficient de x^2,

$$\begin{aligned}\alpha y = {} & \frac{0,12316}{3}\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e\right) \\ & + 0,12316\,(-6,6343)\,(1 + e).\end{aligned}$$

Et pour αy, au moment où l'on a

$$2nt + 2\varpi - 2\psi = 180,$$

c'est-à-dire où les astres sont à l'horizon,

$$\alpha y = \frac{0,12316}{3}\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e\right)$$
$$- 0,12316\,(-6,6343)\,(1+e).$$

Alors, dit LAPLACE, par une SINGULARITÉ REMARQUABLE, la *basse mer* à l'Équateur, quand on suppose la Terre *entièrement recouverte d'eau*, avec une profondeur *constante*, aurait *lieu au moment du passage des astres au méridien*, tandis que la *haute mer* arriverait *quand ces astres seraient à l'horizon*.

La différence de la haute mer à la basse mer serait, dans ce cas, de $7^{m},34$.

Si l'on cherche la valeur de x qui rend nulle la quantité entre parenthèse, c'est-à-dire qui annule αa dans les oscillations de la *troisième* espèce, on trouve que $x = \sin\theta$ ce qui correspond à $\theta = 72^{o}$. Ainsi dans les mêmes hypothèses, par le 18e degré de latitude, il n'y a pas de *marée semi-diurne;* et quand on suppose $l = \frac{1}{2890}$, dans toute la zone comprise entre les deux parallèles de 18°, la *basse mer* a lieu *lors du passage des astres au méridien* et la *haute mer lorsqu'ils sont à l'horizon!*

Dans le cas où l'on suppose $l = \frac{1}{722,5}$, c'est-à-dire 8700 mètres environ, on trouve,

$$\alpha y = 0^{m},12316 \left\{\frac{1+3\cos 2\theta}{3}\right\} \left\{\sin^2 v - \frac{1}{2}\cos^2 v + e\sin^2 v' - \frac{1}{2}e\cos^2 v'\right\}$$
$$+ 0^{m},12316 \left\{\begin{matrix} 1,0000 + 6,1960\,x^2 \\ + 3,2474\,x^4 + 0,7238\,x^6 \\ + 0,0919\,x^8 + 0,0076\,x^{10} \\ + 0,0004\,x^{12} \end{matrix}\right\} x^2. \left\{\begin{matrix} \cos^2 v \cos(2nt \\ + 2\varpi - 2\psi) \\ + e\cos^2 v' \cos(2nt \\ + 2\varpi + 2\psi') \end{matrix}\right\}$$

et, dans ce cas, on obtient $11^{m},05$ pour différence de la haute mer à la basse mer sous l'Équateur!

Mais l'instant de la haute mer est partout celui du passage des astres au méridien.

Enfin, dans le cas où $l = \frac{1}{361,15}$, c'est-à-dire 17000 mètres environ, on a

$$\alpha y = 0^{\mathrm{m}},12316 \left\{ \frac{1+3\cos 2\theta}{3} \right\} \left\{ \sin^2 v - \frac{1}{2}\cos^2 v + e \sin^2 v' - \frac{1}{2} e \cos^2 v' \right\}$$

$$+ 0^{\mathrm{m}},12316 \left\{ \begin{array}{l} 1,0000 + 0,7504\, x^2 \\ + 0,1566\, x^4 + 0,01574\, x^6 \\ + 0,0009\, x^8 \end{array} \right\} x^2 . \left\{ \begin{array}{l} \cos^2 v \cos(2nt \\ \quad + 2\varpi - 2\psi) \\ + e \cos^2 v' \cos(2nt \\ \quad + 2\varpi - 2\psi)' \end{array} \right\}.$$

Et l'on aura, dans les mêmes hypothèses que ci-dessus, $1^{\mathrm{m}},90$ seulement, pour la différence de la haute mer à la basse mer, à l'Équateur, qui arriveront encore : la haute mer au *moment où les astres sont au méridien*, et la basse mer *au moment où les astres sont à l'horizon*.

Si l'on supposait une profondeur de la mer plus considérable, les coefficients de x^2, x^4, x^6 diminuant, on voit que la valeur de αy diminuera aussi; mais cette diminution *a une limite* qui est donnée par l'expression

$$\alpha a = \frac{3 \mathrm{L}}{4 r^3 g} x^2 \cos^2 v.$$

On trouve alors, pour *limite* de la différence entre les hautes et les basses mers, à l'Équateur, lorsque les deux astres sont en *conjonction*, et, en faisant $e = 3$,

$$0^{\mathrm{m}},98528.$$

A l'occasion de cette limite, Laplace fait voir que c'est aussi celle qui convient au cas où la mer prend, à chaque instant, la *figure d'équilibre qui convient aux forces qui l'animent*.

Dans cette hypothèse, il détermine, très simplement, la valeur de αy *quelles que soient la loi de la profondeur et la densité de la mer*.

Il suppose, pour cela, que les mouvements de l'astre et la rotation de la Terre sont assez lents pour que, dans l'équation (23) ou (M), on puisse négliger les quantités

$$\left(\frac{d^2 u}{dt^2}\right), \quad n\left(\frac{du}{dt}\right), \qquad \left(\frac{d^2 v}{dt^2}\right), \quad n\left(\frac{dv}{dt}\right)$$

et il trouve alors pour l'action d'un seul astre et en négligeant les termes du second ordre en ρ,

$$\alpha y = \frac{L}{4 r^3 g \left(1 - \frac{3}{5\rho}\right)} \left\{ \sin^2 v - \frac{1}{2} \cos^2 v \right\} (1 + 3 \cos 2\theta)$$
$$+ \frac{3 L}{r^3 g \left(1 - \frac{3}{5\rho}\right)} \sin v \cos v \sin \theta \cos \theta \cos (nt + \varpi - \psi)$$
$$+ \frac{3 L}{4 r^3 g \left(1 - \frac{3}{5\rho}\right)} \cos^2 v \sin^2 \theta \cos (2nt + 2\varpi - 2\psi).$$

et ensuite, pour les actions combinées *des deux astres*, en supposant qu'ils sont en conjonction, qu'on a $v = v'$, et, enfin, que l'on consi dère le moment de la *haute mer à midi*, où

$$2nt + 2\varpi - 2\psi = 0,$$

il trouve, disons-nous, L étant la masse du Soleil,

$$\alpha y = \frac{L}{4 r^3 g \left(1 + \frac{3}{5\rho}\right)} (1 + e) \left\{ \sin^2 v - \frac{1}{2} \cos^2 \frac{1}{2} v \right\} (1 + 3 \cos$$
$$+ \frac{3 L}{r^3 g \left(1 - \frac{3}{5\rho}\right)} \cos^2 v \operatorname{tg} v \sin^2 \theta \cot \theta \, (1 + e)$$
$$+ \frac{3 L}{4 r^3 g \left(1 - \frac{3}{5\rho}\right)} \cos^2 v \sin^2 \theta \, (1 + e).$$

Pour la basse mer, où l'on a

$$2nt + 2\varpi - 2\psi = 180$$

on obtient,

$$\alpha y = \frac{L}{4 r^3 g \left(1 - \frac{3}{5\rho}\right)} (1 + e) \left\{ \sin^2 v - \frac{1}{2} \cos^2 \frac{1}{2} v \right\} (1 + 3 \cos$$
$$- \frac{3 L}{4 r^3 g \left(1 - \frac{3}{5\rho}\right)} \cos^2 v \sin^2 \theta \, (1 + e)$$

Et l'on a donc, pour *excès de la haute mer sur la basse mer* qui la suit :

$$\frac{3\,L}{r^3 g\left(1-\dfrac{3}{5\rho}\right)}(1+e)\sin^2\theta\cos^2 v\left(\frac{1}{2}+\operatorname{tg} v \operatorname{cotg}\theta\right).$$

Si l'on considère la haute mer à minuit, où $nt+\varpi-\psi=180°$, on obtient, pour différence entre cette haute mer et la basse mer qui suit,

$$\frac{3\,L}{r^3 g\left(1-\dfrac{3}{5\rho}\right)}(1+e)\sin^2\theta\cos^2 v\left(\frac{1}{2}-\operatorname{tg} v \operatorname{cotg}\theta\right).$$

Ces deux excès seraient donc entre eux comme

$$\frac{1-2\operatorname{tg} v\operatorname{cotg}\theta}{1+2\operatorname{tg} v\operatorname{cotg}\theta}.$$

Pour Brest, et en supposant $v=23°$, ce rapport devient

$$\frac{1{,}7953}{0{,}2047};$$

c'est-à-dire, dit Laplace, que le premier excès serait *huit* fois environ *plus grand* que le second; ce qui *est tout à fait en opposition avec les observations faites dans le port de Brest.* On voit donc, ajoute-t-il, qu'on ne peut se dispenser d'introduire dans la théorie du *flux* et du *reflux* de la mer le *mouvement de rotation de la Terre et celui des astres attirants !*

Avant de poursuivre la longue analyse dont nous donnons un résumé, et d'indiquer la manière d'avoir égard, dans la théorie du flux et du reflux de la mer, aux diverses circonstances qui, dans chaque port, influent sur les marées, Laplace cherche d'une manière générale les conditions de la *stabilité de l'équilibre des mers,* qu'il n'a considérée que dans le cas où la Terre n'aurait pas de mouvement de rotation et où la profondeur de la mer serait *constante.*

Il reprend les deux équations (M) et (N), en mettant μ à la place de $\cos\theta$.

En posant $gy' = gy - V'$, ces deux équations donnent lieu aux trois suivantes :

$$(62)\qquad 0 = \left(\frac{d.r^2 s}{dr}\right) + r^2 \left\{ \left(\frac{dv}{d\varpi}\right) - \left(\frac{d\,u\sqrt{1-\mu^2}}{d\mu}\right) \right\}$$

$$(63)\qquad \left(\frac{d^2u}{dt^2}\right) - 2n\mu\sqrt{1-\mu^2}\left(\frac{dv}{dt}\right) = g\left(\frac{dy'}{d\mu}\right)\sqrt{1-\mu^2}$$

$$(64)\qquad (1-\mu^2)\left(\frac{d^2v}{dt^2}\right) + 2n\mu\sqrt{1-\mu^2}\left(\frac{du}{dt}\right) = -g\left(\frac{dy'}{d\varpi}\right).$$

Equations qui sont relatives à une molécule dm quelconque, de l'*intérieur* ou de la *surface* de la mer, déterminée par les coordonnées.

$$\theta + \alpha u, \qquad \varpi + \alpha v, \qquad r + \alpha s;$$

$r + \alpha s$ étant le rayon mené du centre de gravité de la Terre à la molécule considérée.

En désignant par r' et s' les valeurs de r et de s à la surface de la mer, par r_1 et s_1 ces valeurs à la surface du sphéroïde; en représentant par γ la profondeur de la mer, ce qui fait que

$$r' = r_1 + \gamma,$$

en remarquant, aussi, que r' est une fonction de r, θ et ϖ; enfin, après avoir intégré l'équation (62), depuis la surface du sphéroïde recouvert par la mer, jusqu'à celle de la mer, Laplace arrive à l'équation

$$(65)\quad y = u'\left(\frac{dr'}{d\mu}\right)\sqrt{1-\mu^2} - u_1\left(\frac{dr_1}{d\mu}\right)\sqrt{1-\mu^2} - v'\left(\frac{dr'}{d\varpi}\right) + v_1\left(\frac{dr_1}{d\varpi}\right) + \int dr \left\{ \left(\frac{d.u\sqrt{1-\mu^2}}{d\mu}\right) - \left(\frac{dv}{d\varpi}\right) \right\}$$

dans laquelle u' et v' sont les valeurs de u et v, relatives à la surface de la mer, et u_1 et v_1 celles relatives à la surface du sphéroïde.

Cette équation est beaucoup *plus générale* que celle considérée au commencement de la recherche de la théorie du *flux* et du *reflux* de la mer.

En effectuant l'intégration indiquée dans le second membre depuis $r = r$ jusqu'à $r = r + \gamma$, et en supposant que u et v soient les mêmes pour toutes les molécules situées sur le même rayon, LAPLACE fait voir que l'équation (65) coïncide bien avec celle trouvée précédemment.

En multipliant l'équation (63) par $dr\, d\mu\, d\varpi\left(\frac{du}{dt}\right)$, l'équation (64) par $dr\, d\mu\, d\varpi\left(\frac{dv}{dt}\right)$, et en faisant la somme des deux résultats, LAPLACE trouve, en intégrant le résultat final,

$$(66) \quad \left\{ \begin{aligned} &\iiint dr\, d\mu\, d\varpi \left[\left(\frac{du}{dt}\right)\left(\frac{d^2 u}{dt^2}\right) + \left(\frac{dv}{dt}\right)\left(\frac{d^2 r}{dt^2}\right)(1 - \mu^2)\right] \\ &= \iiint dr\, d\mu\, d\varpi \left[g\left(\frac{dy}{dt}\right)\left(\frac{dy'}{dt}\right)\sqrt{1 - \mu^2} - g\left(\frac{dy'}{dt}\right)\left(\frac{dv}{dt}\right)\right]. \end{aligned} \right.$$

En faisant usage de l'intégration par parties, LAPLACE trouve que l'intégrale du second membre se réduit à

$$-\iint d\mu\, d\varpi.\, gy'\left(\frac{dy}{dt}\right);$$

si l'on tient compte, en différentiant l'équation (65) par rapport au temps, qu'il n'y a que u, v et s qui varient avec le temps!

Il transforme encore cette dernière expression et fait voir qu'elle est égale à

$$M - g\iint d\mu.\, d\varpi \left\{\left(1 - \frac{1}{\rho}\right)Y^{(1)\,2} + \left(1 - \frac{3}{5\rho}\right)Y^{(2)\,2} + \left(1 - \frac{3}{7\rho}\right)Y^{(3)\,2} \ldots \right\}$$

$Y^{(1)}$, $Y^{(2)}$... ayant la signification indiquée dans le cours de cette analyse, et M étant une constante *arbitraire*, indépendante du temps t, et qui dépend de l'*état initial* du mouvement de la mer. Elle est très petite, si *l'ébranlement primitif est peu considérable!*

Le premier membre de l'équation (66) est essentiellement *positif*, le second membre *doit l'être;* or, si ρ est *plus grand que l'unité*, la fonction

$$-\rho\iint d\mu\,d\varpi\left\{\left(1-\frac{1}{\rho}\right)\mathrm{Y}^{(1).2}+\left(1-\frac{3}{5\rho}\right)\mathrm{Y}^{(2).2}\ldots\ldots\right\}$$

sera constamment *négative;* il faut donc que cette dernière expression *ne dépasse pas une certaine limite*, et, par suite, les quantités $\mathrm{Y}^{(1)}$, $\mathrm{Y}^{(2)}$ ne *doivent pas contenir d'exponentielles croissantes ni d'arcs de cercle;* d'où il suit que *l'équilibre de la mer est stable, si la densité est moindre que la densité moyenne de la Terre.*

Toute la longue analyse que nous venons de résumer n'est relative qu'aux mouvements de la mer, sous *l'influence de l'attraction de la Lune* et du *Soleil*, et de la *couche aqueuse* qui est supposée envelopper un noyau solide, de forme ellipsoïdale, et telle que la profondeur de la mer soit la *même sur tout un parallèle.*

Il est à remarquer, en outre, que toute cette analyse ne s'applique, en réalité, qu'à la détermination de l'élévation αy, c'est-à-dire suivant le rayon terrestre qui passe au point considéré, sans se préoccuper sérieusement des mouvements αu et αv, en *latitude* et en longitude.

Or, quand on suppose que le noyau solide *a une forme quelconque*, telle que les terres puissent même s'élever au-dessus de la surface du liquide, le phénomène des marées doit nécessairement, *sur les côtes*, résulter surtout des mouvements αu et αv.

Près des continents la profondeur de la mer *étant fort peu de chose*, l'expression αy doit, en ces points, acquérir une valeur très peu considérable.

Ce sont ces mouvements αu et αr, que nous pouvons appeler *tangentiels* qui développent ces courants de marée, provoquant de grandes élévations d'eau dans les points de l'Océan où les terres sont resserrées, parce qu'ils gênent particulièrement le mouvement tangentiel des eaux.

Laplace continue néanmoins son analyse en ne s'occupant réellement que de l'expression αy et cherche, dans ce qui va suivre, *la manière d'avoir égard, dans la théorie du flux et du reflux de la mer, aux diverses circonstances qui, dans chaque port, influent sur les marées.*

Il fait d'abord remarquer que, en ne supposant pas la profondeur de la mer la même sur tout un parallèle, les oscillations de la première espèce ne sont pas modifiées, d'après ce qu'il a indiqué, en discutant ces oscillations, mais que les oscillations de la *seconde* et de la *troisième* espèce doivent éprouver des modifications indiquées dans les expressions qui les représentent. Ne supposant plus la profondeur de la mer la même, sur tout un parallèle, les valeurs de y, u et v devront être représentées par une suite de cosinus d'angles proportionnels aux temps, et dont les coefficients seront des fonctions de μ et de ϖ.

LAPLACE pose alors

$$(67)\qquad \left\{\begin{aligned} y &= \mathrm{F}\cos it + \mathrm{G}\sin it \\ gy - \mathrm{V}' &= \mathrm{F}'\cos it + \mathrm{G}'\sin it \\ u &= \mathrm{H}\cos it + \mathrm{K}\sin it \\ v &= \mathrm{P}\cos it + \mathrm{Q}\sin it \end{aligned}\right.$$

les coefficients F, G, F′, G′, H, K, P et Q étant, ainsi que nous venons de le dire, des fonctions de μ et de ϖ.

En introduisant ces valeurs dans les équations (40) ou (A) et (41) ou (B), et en comparant, dans chaque équation, les coefficients des sinus et des cosinus de it, comme ces équations doivent être satisfaites quel que soit t, on trouve, en fonction de G′ et de F′, les valeurs suivantes :

$$\mathrm{F} = \frac{-\gamma(1-\mu^2)\left(\frac{d^2\mathrm{F}'}{d\mu^2}\right)}{(i^2-4n^2\mu^2)} - \frac{\gamma\left(\frac{d^2\mathrm{F}'}{d\varpi^2}\right)}{(1-\mu^2)(i^2-4n^2\mu^2)} - \left(\frac{d\mathrm{F}'}{d\mu}\right)\frac{d\left(\frac{\gamma(1-\mu^2)}{i^2-4n^2\mu^2}\right)}{d\mu}$$

$$-\frac{\left(\frac{d\mathrm{F}'}{d\varpi}\right)\left(\frac{d\gamma}{d\varpi}\right)}{(1-\mu^2)(i^2-4n^2\mu^2)} + \frac{\frac{2n}{i}\mu\left(\frac{d\mathrm{G}'}{d\mu}\right)\left(\frac{d\gamma}{d\varpi}\right)}{i^2-4n^2\mu^2} - \left(\frac{d\mathrm{G}'}{d\varpi}\right)\frac{d.\left(\frac{\frac{2n}{i}\gamma\mu}{i^2-4n^2\mu^2}\right)}{d\mu}$$

et

$$\mathrm{G} = \frac{-\gamma(1-\mu^2)\left(\frac{d^2\mathrm{G}'}{d\mu^2}\right)}{i^2-4n^2\mu^2} - \frac{\gamma\left(\frac{d^2\mathrm{G}'}{d\varpi^2}\right)}{(1-\mu^2)(i^2-4n^2\mu^2)}$$

$$-\left\{\frac{d\frac{\gamma(1-\mu^2)}{i^2-4n^2\mu^2}}{d\mu}\right\}\left(\frac{d\mathrm{G}'}{d\mu}\right) - \frac{\left(\frac{d\gamma}{d\varpi}\right)\left(\frac{d\mathrm{G}'}{d\varpi}\right)}{(1-\mu^2)(i^2-4n^2\mu^2)}$$

$$-\frac{\frac{2n}{i}\mu\left(\frac{d\gamma}{d\varpi}\right)}{i^2-4n^2\mu^2}\left(\frac{d\mathrm{F}'}{d\mu}\right) + \frac{2n}{i}\left\{\frac{d\left(\frac{\gamma\mu}{i^2-4n^2\mu^2}\right)}{d\mu}\right\}\left(\frac{d\mathrm{F}'}{d\varpi}\right).$$

Puis ausi les coefficients H, K, P, Q.

$$H = \frac{-\left(\frac{dF'}{d\mu}\right)\sqrt{1-\mu^2} - \frac{\frac{2n}{i}\mu\left(\frac{dG'}{d\varpi}\right)}{\sqrt{1-\mu^2}}}{i^2 - 4n^2\mu^2}$$

$$K = \frac{-\left(\frac{dG'}{d\mu}\right)\sqrt{1-\mu^2} + \frac{2n}{i}\mu\left(\frac{dF'}{d\varpi}\right)}{i^2 - 4n^2\mu^2}$$

$$P = \frac{\left(\frac{dF'}{d\varpi}\right) - \frac{2n}{i}\mu(1-\mu^2)\left(\frac{dG'}{d\mu}\right)}{(1-\mu^2)(i^2 - 4n^2\mu^2}$$

$$Q = \frac{\left(\frac{dG'}{d\varpi}\right) + \frac{2n}{i}\mu(1-\mu^2)\left(\frac{dF'}{d\mu}\right)}{(1-\mu^2)(i^2 - 4n^2\mu^2)}.$$

A l'aide des équations donnant (F) et (G), Laplace détermine la profondeur de la mer qui rend *nulles* les ocillations de la *seconde* espèce pour tous les lieux du Globe.

Il fait remarquer que, dans ce cas, y doit être *nul* et qu'on doit donc avoir

$$F = 0, \qquad G = 0$$

et

$$-V' = F'\cos it + G'\sin it.$$

D'après ce qui a été dit, dans la discussion des oscillations de la seconde espèce, l'action de l'astre L donne une suite de termes de la forme

$$\alpha k\mu\sqrt{1-\mu^2}\cos(it + \varpi - A)$$

ou

$$\alpha k\mu\sqrt{1-\mu^2}\cos(it + \varpi'),$$

en posant

$$\varpi - A = \varpi'$$

Cette expression se divise en deux séries de termes

$$\alpha k\mu\sqrt{1-\mu^2}\cos\varpi'\cos it - \alpha k\mu\sqrt{1-\mu^2}\sin\varpi'\sin it,$$

on en conclut donc que

$$-V' = M\mu\sqrt{1-\mu^2}\cos\varpi'\cos it - M\mu\sqrt{1-\mu^2}\sin\varpi'\sin it$$

d'où l'on a

$$F' = M\mu\sqrt{1-\mu^2}\cos\varpi'$$

$$G' = -M\mu\sqrt{1-\mu^2}\sin\varpi'.$$

Et on peut en déduire les premiers et seconds coefficients différentiels

$$\left(\frac{dF'}{d\mu}\right),\quad \left(\frac{d^2F'}{d\mu^2}\right),\quad \left(\frac{dF'}{d\varpi}\right),\quad \left(\frac{d^2F'}{d\varpi^2}\right),\quad \left(\frac{dG'}{d\mu}\right),\quad \left(\frac{d^2G'}{d\varpi}\right).$$

En substituant les expressions qu'on obtient pour ces quantités, dans le second membre des relations donnant F et G, on arrive, en remarquant que pour les oscillations de la *seconde* espèce i est sensiblement égal à n, on arrive, dis-je, aux deux relations :

$$0 = \cos\varpi\left(\frac{d\gamma}{d\mu}\right)\sqrt{1-\mu^2} + \frac{\mu\left(\frac{d\gamma}{d\varpi}\right)\sin\varpi}{\sqrt{1-\mu^2}}$$

$$0 = \sin\varpi\left(\frac{d\gamma}{d\mu}\right)\sqrt{1-\mu^2} - \frac{\mu\left(\frac{d\gamma}{d\varpi}\right)\cos\varpi.}{\sqrt{1-\mu^2}}$$

Équations qui montrent que $\left(\frac{d\gamma}{d\mu}\right) = o$ et $\left(\frac{d\gamma}{d\varpi}\right) = o$.

Laplace en conclut que les oscillations de la *seconde* espèce ne peuvent disparaître pour toute la Terre que *dans le seul cas où la profondeur de la mer est constante.*

Par des considérations analytiques du même genre, l'illustre auteur de la *Mécanique céleste* démontre aussi qu'il n'y a aucune loi admissible de profondeur de la mer pouvant rendre *nulles*, pour toute la Terre, *les oscillations de la troisième espèce.*

Il en résulte que l'on doit donc conserver, dans la valeur de αy, des facteurs ou des termes fonctions de μ et de ϖ et dépendant de la profondeur de la mer.

Dans cet ordre d'idées, Laplace introduit ces facteurs ou ces termes dans les expressions relatives aux trois oscillations ; et en posant

$$\frac{6\,lq\sin\theta\cos\theta}{2\,lgq\left(1-\frac{3}{5\rho}\right)-n^2} = A$$

et en représentant par ϵ une quantité qui, comme A, est une fonction *inconnue* de μ et de ϖ dépendant de la profondeur de la mer, il trouve, en désignant par B et λ les coefficients analogues à A et ϵ, mais considérés relativement à l'action de la Lune :

$$
(68)\left\{
\begin{aligned}
\alpha y = &-\frac{(1+3\cos 2\theta)}{8g\left(1-\frac{3}{5\rho}\right)}\left\{\frac{L}{r^3}(1-3\sin^2 v)+\frac{L'}{r'^3}(1-3\sin^2 v')\right\}\\
&+ A\left\{\begin{aligned}&\frac{L}{r^3}\sin v\cos v\cos(nt+\varpi-\psi-\epsilon)\\ &+\frac{L'}{r'^3}\sin v'\cos v'\cos(nt+\varpi-\psi'-\epsilon)\end{aligned}\right\}\\
&+ B\left\{\begin{aligned}&\frac{L}{r^3}\cos^2 v\cos 2(nt+\varpi-\psi-\lambda)\\ &+\frac{L'}{r'^3}\cos^2 v'.\cos 2(nt+\varpi-\psi'-\lambda).\end{aligned}\right\}
\end{aligned}
\right.
$$

Les quantités A, B, ϵ et λ sont des quantités *propres à chaque lieu* et qui doivent être déterminées par les observations!

Les quantités L, r, v et ψ sont relatives au *Soleil*, et les quantités L', r', v' et ψ' sont relatives à la *Lune*.

Toute la longue analyse de Laplace se réduit donc à cette formule (68) que nous pourrions qualifier d'*empirique*, bien qu'elle contienne des termes qui résultent d'un examen théorique de la question.

Toutefois, nous devons faire l'observation suivante : Cette valeur de αy ne donne en réalité que l'élévation de l'eau, à une époque déterminée, dans un lieu dont la latitude serait $(90-\theta)$ et la longitude ϖ ; qui serait entièrement recouvert d'eau, la profondeur de la mer étant quelconque, et pouvant alors modifier cette élévation suivant les valeurs que la configuration *du fond de la mer* peut fournir aux quantités A, B, ϵ et λ.

Mais cette valeur de αy qui n'est que l'accroissement ou la diminution du rayon r dans le lieu liquide considéré, la Terre étant supposée *entièrement recouverte d'eau*, doit avoir une valeur *presque nulle* près des côtes où l'on observe les marées, puisque la *profondeur de la mer est presque nulle en ces points*.

Il n'en est pas de même, ainsi que je l'ai déjà dit, des quantités αu et v, qui, sur le littoral, doivent avoir une importance considérable. Ce sont évidemment ces mouvements *tangentiels* des eaux, mouvements produits par l'action de la Lune et du Soleil, qui produisent sur les côtes, *presque seuls*, le phénomène des marées tel qu'il est observé.

Laplace sait bien que sa formule finale n'est pas satisfaisante, au point de vue théorique, car il dit, après l'avoir établie :

« Cette forme embrasse *un grand nombre de variétés* du phénomène « des marées qui peuvent avoir lieu dans les différents ports.

« Lorsque la Terre est un solide de révolution, la discussion des « oscillations de la *seconde* et de la *troisième* espèce montre qu'elles « sont *maxima* ou *minima* au moment du passage au méridien de « l'astre qui les produit, puisque, à ce moment, on a $nt + \varpi - \psi = o$; « mais la formule (68) fait voir qu'en raison des quantités λ et ϵ, « l'instant du *maximum* des oscillations de la *seconde* et de la *troisième* espèce peut être *très différent* de celui du *passage des astres* « *au méridien*. »

Les quantités A, B, ϵ et λ ayant des valeurs propres à chaque localité, on comprend que, dans plusieurs ports, les oscillations d'une espèce peuvent l'emporter sur les oscillations de l'autre espèce. Toutefois, d'après cette formule (68), les *maxima* ou *minima* de ces oscillations devraient suivre d'un même intervalle les passages des astres au méridien, ce qui, dit Laplace, est en contradiction avec les observations, et il ajoute :

« Quelque étendue que soit la formule précédente, elle ne satisfait pas encore a tous les phénomènes observés !

« L'irrégularité de la profondeur de l'Océan, la manière dont il est « réparti sur la Terre, la position et la pente des rivages, leurs rapports avec les côtes qui les avoisinent, les courants, les résistances « que les eaux éprouvent, toutes ces causes, qu'il est impossible de « soumettre au calcul, dit Laplace, *modifient les oscillations de cette* « *grande masse fluide*. On ne peut donc, ajoute-t-il, qu'envisager les « phénomènes généraux résultant de l'attraction de la Lune et du « Soleil *et tirer des observations* les *données* dont la connaissance est « indispensable pour compléter, *dans chaque port*, la théorie du flux « et du reflux de la mer, et qui sont autant d'*arbitraires* dépendantes « de l'étendue de la mer, de sa profondeur et des circonstances locales « du port. »

C'est sous ce dernier point de vue que Laplace envisage la théorie des oscillations de l'Océan et sa correspondance avec les observations.

Il nomme toujours R le rayon de la Terre à la molécule dm considérée, θ la colatitude du lieu et ϖ sa longitude.

En appelant aussi $\alpha V'$ la fonction que nous avons donnée (du moins en ce qui concerne l'action d'un seul astre, et qui est l'expression du travail virtuel développé par l'astre sur la molécule dm) on a, en considérant les actions du Soleil et de la Lune,

$$\alpha V' = \frac{3 L R^2}{2 r^3} \left\{ [\sin v \cos \theta + \cos v \sin \theta \cos (nt + \varpi - \psi)]^2 - \frac{1}{3} \right\}$$
$$+ \frac{3 L' R^2}{2 r'^3} \left\{ [\sin v' \cos \theta + \sin v \sin \theta \cos (nt + \varpi - \psi')]^2 - \frac{1}{3} \right\}.$$

En appelant $F\,df$ le travail mécanique développé, en ne considérant que l'action du Soleil, par exemple; F', F'' et F''' les composantes de la force F, et si l'on suppose un instant le Soleil fixé dans la Voûte Céleste, c'est-à-dire que, dans $\alpha V'$, les quantités R, θ et ϖ soient les seules variables, on aura

$$F' = \alpha \left(\frac{dV'}{dr}\right)$$
$$F'' = \alpha \left(\frac{dV'}{d\theta}\right)$$
$$F''' = \alpha \frac{\left(\frac{dV'}{d\varpi}\right)}{\sin \theta}.$$

Et en faisant $R = 1$, on en déduira

$$F' = 2.\alpha V'.$$

Ces expressions, dit LAPLACE, sont très approchées pour le Soleil, à cause de sa grande distance à la Terre qui rend insensibles les termes multipliés par $\frac{L}{r^4}$. Elles sont *moins exactes* pour la Lune, ajoute-t-il; mais les phénomènes des marées ne lui ont rien fait apercevoir qui puisse dépendre des forces $\frac{L'}{r'^4}$*; peut-être, dit-il, des obser-

* LAPLACE n'a en effet examiné *sérieusement* que le phénomène des marées dans le port de Brest.

vations plus exactes et plus nombreuses rendront sensibles les effets de ces forces !

En ne considérant toujours que l'action du Soleil, et en supposant qu'il se meut dans le plan de l'Équateur, uniformément, et toujours à la même distance de la Terre, il trouve alors, d'après les relations ci-dessus :

$$F' = \frac{3\,L}{2r^3}\left\{\sin^2\theta - \frac{2}{3} + \sin^2\theta\cos(2\,nt + 2\,\varpi - 2\,\psi)\right\}$$

$$F'' = \frac{3\,L}{2r^3}\sin\theta\cos\theta\left\{1 + \cos(2\,nt + 2\,\varpi - 2\,\psi)\right\}$$

$$F''' = -\frac{3\,L}{2r^3}\sin\theta\sin(2\,nt + 2\,\varpi - 2\,\psi).$$

Dans ces expressions, LAPLACE ne considère que les parties variables, parce qu'il admet *comme principe de dynamique* que « l'état « *d'un système de corps, dans lesquels les conditions primitives du mou-* « *vement ont disparu par les résistances qu'il éprouve, est périodique* « *comme les forces qui l'animent.* »

Et il démontre ensuite, d'une manière générale, que l'Océan doit redevenir le même à chaque intervalle d'un demi-jour, et qu'il doit y avoir un flux et un reflux dans cet intervalle.

Continuant son analyse, il pense pouvoir admettre qu'en prenant les résultats moyens d'un grand nombre d'observations, continuées pendant plusieurs années, ces résultats représenteront, à très peu près, l'effet des forces régulières qui agissent sur l'Océan.

Il considère ensuite une courbe plane rapportée à deux axes rectangulaires, dont les *abscisses* représentent le temps et les *ordonnées*, les hauteurs de la mer correspondantes.

La partie de la courbe correspondante à l'abscisse qui représente un demi-jour, déterminera *la courbe entière* qui sera formée de cette partie *répétée à l'infini.*

Ainsi, ajoute-t-il, l'intervalle entre deux pleines mers consécutives sera d'un demi-jour comme l'intervalle entre deux basses mers consécutives.

Pour déterminer cette courbe, LAPLACE imagine un *second soleil* L, parfaitement égal au premier, mû de la même manière dans le plan de l'Équateur, mais précédant le premier d'un angle

$n' \mathrm{T}$

n' égal à $n - \frac{d\psi}{dt}$.

On a les forces relatives à ce nouveau Soleil en changeant simplement

$$\psi \text{ en } \psi + n' \mathrm{T}$$

dans les parties *variables* des expressions F', F'', F''' données ci-dessus. Et si l'on suppose que les deux Soleils agissent ensemble, on obtiendra alors, pour les forces réunies, et en posant

$$\mathrm{L}_1 = 2 \mathrm{L} \cos n' \mathrm{T}$$

on obtiendra, dis-je, les trois expressions :

$$\frac{3\mathrm{L}_1}{2r^3} \sin^2 \theta \cos \left[2n\left(t - \frac{\mathrm{T}}{2}\right) + 2\varpi - \left(2\psi - 2\frac{d\psi}{dt}\frac{\mathrm{T}}{2}\right)\right]$$

$$\frac{3\mathrm{L}_1}{2r^3} \sin \theta \cos \theta \cos \left[2n\left(t - \frac{\mathrm{T}}{2}\right) + 2\varpi - \left(2\psi - 2\frac{d\psi}{dt}\frac{\mathrm{T}}{2}\right)\right]$$

$$-\frac{3\mathrm{L}_1}{2r^3} \sin \theta \sin \left[2n\left(t - \frac{\mathrm{T}}{2}\right) + 2\varpi - \left(2\psi - 2\frac{d\psi}{dt}\frac{\mathrm{T}}{2}\right)\right]$$

L'analogie de ces expressions avec les parties variables de F', F'', F''' montre que ces *deux Soleils* doivent produire un flux et un reflux semblable à celui qu'exciterait l'astre L si sa masse se changeait en

$$2 \mathrm{L} \cos n' \mathrm{T}.$$

et si l'on diminuait de $\frac{\mathrm{T}}{2}$ le temps T dans les forces primitivement considérées !

Laplace admet ensuite que les *hauteurs* de la mer *sont proportionnelles aux forces qui les produisent*, ce qui ne paraît pouvoir être admis, dans une certaine mesure, que lorsque l'on considère la Terre comme entièrement recouverte d'eau et que, pour expliquer le phénomène de la marée, on n'envisage que l'élévation αy et nullement ce que doivent produire, sur les côtes des océans, les mouvements u et αv.

En nommant alors y'' l'ordonnée de la courbe des hauteurs de la mer correspondant à l'abscisse $t + \frac{1}{2}T$, il trouve

$$\frac{L_1 y''}{L}$$

pour la hauteur de la mer produite par l'action des deux Soleils.

Cette hauteur, dit-il, est par la nature des oscillations *très petites*, la somme des hauteurs de la mer due aux actions des deux Soleils.

Si donc y est l'ordonnée de la courbe des hauteurs de la mer correspondante au temps t et *due à l'action du vrai Soleil, y' l'ordonnée de la courbe correspondante au temps t-T et due aux forces du Soleil fictif,* on devra avoir la relation

$$y + y' = \frac{L_1 y''}{L}.$$

En supposant T très petit de manière à remplacer dans L_1, $\cos n'T$ par $1 - \frac{n'^2 T^2}{2}$, on obtient

$$(69) \qquad y + y' = 2y'' - n'^2 T^2 y''.$$

Si l'on développe les quantités y' et y'' en séries, suivant les puissances croissantes de T, on a, en négligeant les puissances supérieures au carré, et en remarquant que l'on a

$$\begin{aligned} y &= f(t) \\ y' &= f(t - T) \\ y'' &= f\left(t - \frac{T}{2}\right) \end{aligned}$$

et par suite, que les développements que nous venons d'indiquer sont :

$$(70) \qquad \left\{ \begin{aligned} y' &= y - T\frac{dy}{dt} - \frac{T^2}{2}\frac{d^2y}{dt^2} \\ y'' &= y - \frac{T}{2}\frac{dy}{dt} + \frac{T^2}{8}\frac{d^2y}{dt^2}. \end{aligned} \right.$$

on arrive, à l'aide des relations (69) et (70), à l'équation

$$-n'^2 T^2 y'' = \frac{T^2}{4}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$$

qui conduit à la relation

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -4n'^2y''$$

que, T étant très petit, Laplace écrit

$$(71) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -4n'^2y.$$

En intégrant cette équation différentielle linéaire du second ordre, il arrive en introduisant les constantes ϖ, λ et B, à l'expression

$$(72) \qquad y = \frac{BL}{r^3}\cos(2nt + 2\varpi - 2\psi - 2\lambda).$$

B et λ sont les constantes relatives au port considéré; B dépend de la grandeur de la *marée totale* et λ de l'heure de la marée à l'époque des syzygies.

Je crois devoir faire remarquer que, évidemment,

$$y = \frac{BL}{r^3}\sin(2nt + 2\varpi - 2\psi - 2\lambda)$$

donne la même équation linéaire du second ordre que l'expression (72) *de y adoptée par* Laplace, qui rentre dans la première par la con stante λ.

Si l'on conçoit un *cercle vertical*, dont la circonférence représente un intervalle d'un demi-jour et dont le diamètre vertical soit égal à la *marée totale*, c'est-à-dire à la différence des hauteurs de la pleine mer et de la basse mer; si l'on suppose, en outre, que les arcs de cette circonférence, en partant du point le plus bas, expriment le temps écoulé depuis la basse mer, il est clair, dit Laplace toujours en se rapportant à l'intégrale qu'il a adoptée, que les *sinus-verses* de ces arcs représenteront les hauteurs de la mer qui correspondent à ces arcs.

Laplace pense que cette loi s'observe exactement au milieu d'une mer libre. *Malheureusement, personne n'a pu vérifier cette supposition.*

Tout ce que nous venons de dire ne se rapporte qu'à un astre, au *Soleil*, par exemple; si l'on considère la Lune, en supposant aussi que cet astre se meut uniformément dans le plan de l'Équateur, on aura, d'après LAPLACE, pour la hauteur de la mer due aux actions réunies du *Soleil* et de la *Lune*

$$(73) \quad y = \frac{BL}{r^3} \cos(2nt + 2\varpi - 2\psi - 2\lambda) + \frac{B'L'}{r'^3} \cos(2nt + 2\varpi - 2\psi' - 2\lambda').$$

A l'aide de cette formule, et par la considération des coefficients solaires et lunaires

$$\frac{BL}{r^3} \quad \text{et} \quad \frac{B'L'}{r'^3}.$$

L'auteur examine ce qui doit se passer relativement aux heures des basses mers et des pleines mers, dans chaque port.

Il trouve que si le coefficient solaire *surpasse* le coefficient lunaire, la hauteur solaire *maximum* qui a lieu chaque jour quand $nt + \omega - \psi - \lambda = o$, c'est-à-dire peu de temps avant ou après le passage de l'astre au méridien, sera modifiée par la *hauteur lunaire* qui produira *une pleine mer maximum* quand on aura

$$nt + \varpi - \psi - \lambda = 0 \text{ ou } 360^\circ$$

et

$$nt + \varpi - \psi' - \lambda' = 0 \text{ ou } 360.$$

Ce qui donne

$$\psi - \psi' = \frac{\lambda' - \lambda}{2} \text{ ou } 180 - \frac{\lambda' - \lambda}{2}$$

C'est-à-dire, si λ et λ' diffèrent peu, à peu près à l'époque de la *pleine lune* et de la *nouvelle lune*. La hauteur lunaire produira une pleine mer *minimum* quand on aura

$$nt + \varpi - \psi - \lambda = 0$$

et

$$nt + \varpi - \psi' - \lambda' = 180^\circ$$

C'est-à-dire,

$$\psi - \psi' = 90^\circ + \frac{\lambda' - \lambda}{2},$$

ce qui indique l'époque de la quadrature, si λ' et λ sont peu différents.

Mais Laplace fait remarquer que, dans ce cas, ψ ayant peu varié dans l'intervalle de la nouvelle lune au 1er quartier, les heures de cette pleine mer *maximum* et de cette pleine mer *minimum* seront à peu près

$$t = \frac{\psi + \lambda - \varpi}{n}$$

C'est à dire la même.

Lorsqu'au contraire le coefficient lunaire surpasse le coefficient solaire, le *maximum* de la pleine mer aura à peu près lieu quand les astres seront en conjonction, ou en opposition.

Le *minimum* aura lieu quand les astres seront en *quadrature*, mais l'heure de la pleine mer *maximum* aura lieu quand

$$t = \frac{\psi + \lambda - \varpi}{n}$$

et l'heure de la pleine mer *minimum* quand on aura

$$t = \frac{180 + \psi + \lambda - \varpi}{n}.$$

Laplace a cru pouvoir établir, d'après les observations faites dans nos ports, que la plus grande marée *suit d'un jour et demi* environ la nouvelle ou la pleine lune.

$\psi' - \psi$ est donc *positif* et par suite $\lambda' - \lambda$ est *négatif*. Donc λ surpasse λ'; c'est-à-dire que dans les ports de la Manche le retard de la marée solaire sur le passage du Soleil au méridien est *plus grand* que le retard de la marée lunaire sur le passage de la Lune au méridien.

Laplace essaie d'expliquer ce phénomène en imaginant un large canal communiquant avec la mer et s'avançant fort loin dans les terres sous le méridien de son embouchure; et en supposant qu'à cette embouchure la pleine mer a lieu à l'instant même du passage de l'astre au méridien. Alors, d'après lui, le phénomène est expliqué *par la considération de la différence de durée des jours solaire et lunaire.*

En supposant le canal plus *oriental* à son extrémité qu'à son embouchure, puis en supposant à ce canal deux embouchures et ensuite un plus grand nombre, il fait voir que les constantes qui entrent dans la hauteur de la mer dépendent de *la rapidité du mouvement de l'astre dans son orbite.*

Il indique aussi que le rapport des coefficients $\frac{BL}{r^3}$ et $\frac{B'L'}{r'^3}$ n'étant point le rapport des actions solaires et lunaires $\frac{L}{r^3}$ et $\frac{L}{r'^{3'}}$ ce n'est qu'en ayant égard à la différence des valeurs de B et de B' que l'on peut déterminer, par le phénomène des marées, le rapport des forces du Soleil et de la Lune.

Et il ajoute que puisque les constantes B et λ seraient *les mêmes pour le Soleil et pour la Lune,* si les mouvements de ces astres étaient *égaux,* il est naturel, dit-il, de supposer que leurs différences sont *proportionnelles* aux différences de ces mouvements, et il croit pouvoir alors transformer les constantes λ et B, de la manière suivante, en posant :

$$\lambda = O - mt$$
$$B = P(1 - 2mQ).$$

Les constantes O, T, P et Q étant les mêmes pour le Soleil et la Lune, et m étant égal à $\frac{d\psi}{dt}$ pour le Soleil, et à $\frac{d\psi'}{dt}$ pour la Lune.

Edmond Dubois,

Examinateur-hydrographe de la marine

(A suivre.)